capítulo 6

Uma aproximação para o controle misto H_2/H_∞

6.1 Sobre este capítulo

Neste capítulo se considera o problema de controle misto H_2/H_∞ para sistemas lineares discretos sujeitos a saltos markovianos. Esta primeira seção apresenta o problema de maneira pouco rigorosa, apenas a título de introdução. A seção 6.2 apresenta o resultado principal deste capítulo, que mostra condições suficientes para a existência de uma solução para o problema de controle H_2/H_∞ e aponta o caminho para a sua resolução por meio de métodos numéricos. A maneira como isto é feito se encontra na seção 6.3, onde se formula um problema de programação convexa capaz de fornecer uma solução aproximada (aproximada no sentido de ser uma solução conservadora) para o problema original de controle. Finalmente, a seção 6.4 recapitula os resultados obtidos e inclui alguns comentários.

O problema aqui consiste em se obter um controlador estabilizante no sentido da média quadrática tal que um limite superior para a norma H_2 do sistema seja minimizado, porém garantindo-se que a norma H_∞ do sistema seja menor que um valor pré-especificado ν.

Como se verá a seguir, é possível encontrar uma aproximação para esse problema de controle, aproximação essa convexa, o que permite a solução do problema por meios numéricos com rela-

tiva facilidade. Além disso, tal formulação pode ser alterada de maneira a considerar também o problema de controle H_∞.

6.2 O problema de controle

O controle misto H_2/H_∞ para sistemas lineares discretos tem sido estudado na literatura usualmente por meio da abordagem de espaço de estados, o que leva a equações de Riccati algébricas modificadas e equações tipo Lyapunov (veja por exemplo [28], [36], [37]). Os problemas de controle H_2 e H_∞ para sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos foram recentemente analisados em [17], [19] e [25]. Para o problema de controle H_2, uma abordagem via programação convexa foi utilizada em [19], resultando em algoritmos numéricos para a resolução do problema.

Neste capítulo se assumirá que tanto o estado do sistema como o valor assumido pela cadeia de Markov no instante de tempo corrente são conhecidos. Ao contrário dos capítulos anteriores, pode-se assumir que a matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov não é exatamente conhecida. Tal condição é substituída pela hipótese mais fraca de que ela apenas pertença a um conjunto convexo apropriado. Neste caso, o controlador estabilizante é definido como aquele que estabiliza o sistema markoviano para todas as matrizes de probabilidades de transição dentro do conjunto. Este conceito, de matriz de probabilidades de transição não conhecida, foi inicialmente introduzido em [47] para sistemas lineares a tempo contínuo sujeitos a saltos markovianos.

Para se obter os resultados, foi traçado um paralelo com a teoria de controle H_2/H_∞ e H_∞ para sistemas lineares discretos. Quando restritos a sistemas sem saltos, os resultados apresentados aqui podem ser vistos como duais aos de [28].

Considere então o seguinte sistema linear discreto sujeito a saltos markovianos:

$$\Sigma = \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) + D\omega(k) \\ z(k) = M_{\theta(k)}x(k) + J_{\theta(k)}u(k) \\ x(0) = x_0 \qquad \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

A formulação acima para o sistema é similar à apresentada na equação (5.1) na página 53, com a diferença de que agora supõe-se que a matriz $D \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^n)$ seja constante. São feitas as seguintes hipóteses:

i) para ;

ii) para .

Considere então o sistema (6.1) com dado por para .

Tal sistema será denotado como Σ_F.

A proposição abaixo será útil na sequência, como um resultado auxiliar para a demonstração do teorema 6.2. A sua prova segue diretamente da prova do lema 5.4 na página 56.

Proposição 6.1: Suponha que (M, A) seja detectável na média quadrática, e que $X = (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{H}^n$ e $F = (F_1, \ldots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$ satisfaçam

$$-X_i + (A_i + B_iF_i)^* \mathcal{E}_i(X)(A_i + B_iF_i) + (M_i + J_iF_i)^* (M_i + J_iF_i) \leq 0 \tag{6.2}$$

para $i = 1, \ldots, N$. Então $F = (F_1, \ldots, F_N)$ estabiliza (A, B) na média quadrática.

O teorema a seguir é o principal resultado deste capítulo. Ele apresenta uma condição suficiente para a existência de uma lei de controle por realimentação de estado que estabiliza (A, B) na média quadrática. O resultado obtido se mostrará bastante conveniente para a obtenção de algoritmos para a solução do problema, como se verá na seção 6.3.

Teorema 6.2: Suponha que (M, A) seja detectável na média quadrática e que $\nu > 0$ seja um número real fixado. Se existirem $X = (X_1, \ldots, X_N) \geq 0$ e $F = (F_1, \ldots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$ tais que para $i = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned} -X_i + (A_i + B_iF_i)^* \mathcal{E}_i(X)(A_i + B_iF_i) + \\ (M_i + J_iF_i)^* (M_i + J_iF_i) + \frac{1}{\nu^2} X_i D D^* X_i \leq 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

então $F = (F_1, \ldots, F_N)$ estabiliza (A, B) na média quadrática e

$$\|\Sigma_F\|_\infty^2 \leq \nu^2(1 - \delta) \leq \nu^2,$$

onde $\delta \in \left(0, \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^{N} \text{tr}\,\{D^* X_i D\}\right)$. Além disso,

$$\|\Sigma_F\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^{N} \text{tr}\,\{D^* X_i D\}.$$

Prova: Comparando (6.2) e (6.3), é imediato da proposição 6.1 que F estabiliza (A, B) na média quadrática.

Sejam então $\tilde{A} = (\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_N)$ e $\tilde{M} = (\tilde{M}_1, \ldots, \tilde{M}_N)$ com $\tilde{A}_i = A_i + B_iF_i$ e $\tilde{M}_i = M_i + J_iF_i$ para $i = 1, \ldots, N$. Lembrando da proposição 2.16 na página 22, que para qualquer $\omega = (\omega(0), \ldots) \in l_2^r$, $x = (0, x(1), \ldots) \in l_2^n$ e que $x(k)$, $\theta(k)$ e $\omega(k)$ são $\Im_k$-mensuráveis. Tem-se de (6.3) que

$$
\begin{aligned}
&E(x(k+1)^* X_{\theta(k+1)} x(k+1)) = \\
&= E(x(k+1)^* E(X_{\theta(k+1)} | \Im_k) x(k+1)) \\
&= E((\tilde{A}_{\theta(k)} x(k) + D\omega(k))^* \mathcal{E}_{\theta(k)}(X)(\tilde{A}_{\theta(k)} x(k) + D\omega(k))) \\
&\leq E\Big(x(k)^* \Big(X_{\theta(k)} - \tilde{M}^*_{\theta(k)} \tilde{M}_{\theta(k)} - \frac{1}{\nu^2} X_{\theta(k)} D D^* X_{\theta(k)} \Big) x(k) + \\
&\quad \omega(k)^* D^* \mathcal{E}_{\theta(k)}(X) \tilde{A}_{\theta(k)} x(k) + x(k)^* \tilde{A}^*_{\theta(k)} \mathcal{E}_{\theta(k)}(X) D\omega(k) + \\
&\quad \omega(k)^* D^* \mathcal{E}_{\theta(k)}(X) D\omega(k) \Big)
\end{aligned}
$$

e daí

$$
\begin{aligned}
&\left\| X^{1/2}_{\theta(k+1)} x(k+1) \right\|_2^2 - \left\| X^{1/2}_{\theta(k)} x(k) \right\|_2^2 + \|z(k)\|_2^2 \leq \\
&\leq -\frac{1}{\nu^2} \left\| D^* X_{\theta(k)} x(k) \right\|_2^2 + E(\omega(k)^* D^* \mathcal{E}_{\theta(k)}(X) \tilde{A}_{\theta(k)} x(k)) + \\
&\quad E(x(k)^* \tilde{A}^*_{\theta(k)} \mathcal{E}_{\theta(k)}(X) D\omega(k)) + \left\| \mathcal{E}_{\theta(k)}(X)^{1/2} D\omega(k) \right\|_2^2 \\
&= -\frac{1}{\nu^2} \left\| D^* X_{\theta(k+1)} x(k+1) \right\|_2^2 + \frac{1}{\nu^2} \left\| D^* X_{\theta(k+1)} x(k+1) \right\|_2^2 - \\
&\quad \frac{1}{\nu^2} \left\| D^* X_{\theta(k)} x(k) \right\|_2^2 + 2E(\omega(k)^* D^* \mathcal{E}_{\theta(k)}(X)(\tilde{A}_{\theta(k)} x(k) + D\omega(k))) - \\
&\quad E(\omega(k)^* D^* \mathcal{E}_{\theta(k)}(X) D\omega(k)).
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
&\left\| X^{1/2}_{\theta(k+1)} x(k+1) \right\|_2^2 - \left\| X^{1/2}_{\theta(k)} x(k) \right\|_2^2 + \|z(k)\|_2^2 + \\
&\qquad \frac{1}{\nu^2} \left\| D^* X_{\theta(k)} x(k) \right\|_2^2 - \frac{1}{\nu^2} \left\| D^* X_{\theta(k+1)} x(k+1) \right\|_2^2 \leq \\
&\leq -\frac{1}{\nu^2} \left\| D^* X_{\theta(k+1)} x(k+1) \right\|_2^2 + 2E(\omega(k)^* D^* X_{\theta(k+1)} x(k+1)) - \\
&\quad \nu^2 \|\omega(k)\|_2^2 + E(\omega(k)^* (\nu^2 I - D^* \mathcal{E}_{\theta(k)}(X) D)\omega(k)) \\
&= -\left\| \frac{1}{\nu} D^* X_{\theta(k+1)} x(k+1) - \nu\omega(k) \right\|_2^2 + \\
&\quad E(\omega(k)^* (\nu^2 I - D^* \mathcal{E}_{\theta(k)}(X) D)\omega(k)) \\
&\leq E(\omega(k)^* (\nu^2 I - D^* \mathcal{E}_{\theta(k)}(X) D)\omega(k)) .
\end{aligned}
$$

Tomando a soma de $k = 0$ até ∞, e lembrando que $x(0) = 0$ e que $\|x(k)\|_2 \to 0$ quando $k \to \infty$, tem-se que

$$\|z\|_2^2 \leq \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\omega(k)^* \left(I - \frac{1}{\nu^2} D^* X_{\theta(k+1)} D\right)\omega(k)\right) \leq \nu^2(1-\delta)\|\omega\|_2^2 ,$$

onde $\delta \in \left(0, \frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{N} \text{tr}\,\{D^* X_i D\}\right)$. Portanto,

$$\|\Sigma_F\|_\infty = \sup_{\theta_0} \sup_{\omega \in l_2^p} \frac{\|z\|_2}{\|\omega\|_2} \leq \nu(1-\delta)^{1/2} < \nu .$$

Finalmente, note que da proposição 2.15 na página 22, $\|\Sigma_F\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N} \text{tr}\,\{D^* S_i D\}$, onde

$$S_i = \tilde{A}_i^* \mathcal{E}_i(S)\tilde{A}_i + \tilde{M}_i^* \tilde{M}_i \text{ para } i = 1, \ldots, N .$$

De (6.3), tem-se que para algum $V = (V_1, \ldots, V_N)$ com $V_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, N$,

$$X_i = \tilde{A}_i^* \mathcal{E}_i(X)\tilde{A}_i + \tilde{M}_i^* \tilde{M}_i + \frac{1}{\nu^2} X_i D D^* X_i + V_i^* V_i ,$$

de forma que, pela proposição 2.6 na página 12, $X_i \geq S_i$ para $i = 1, \ldots, N$. Isso implica em

$$\|\Sigma_F\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N} \text{tr}\,\{D^* S_i D\} \leq \sum_{i=1}^{N} \text{tr}\,\{D^* X_i D\} ,$$

o que completa a prova do teorema.

□

Note que para o caso em que $N = 1$ e consequentemente a matriz de probabilidades de transição é dada por $P = p_{11} = 1$, a equação (6.3) pode ser vista como dual da obtida no lema 3.1 de [28].

Note que como o teorema acima apresenta uma condição apenas suficiente para a existência de uma solução para o problema de controle, as soluções obtidas podem ser conservadoras, isto é, podem existir outras soluções para o problema de controle que não satisfaçam às condições do teorema, soluções que poderiam eventualmente produzir melhores resultados.

A próxima seção apresenta um procedimento para a resolução do problema de controle misto H_2/H_∞ baseado no resultado apresentado acima.

6.3 Abordagem convexa

6.3.1 O controle H_2/H_∞

O teorema 6.2 da seção anterior sugere a seguinte aproximação para o problema de controle misto

H_2/H_∞: Para $\nu > 0$ fixado, encontre $X = (X_1, \ldots, X_N) \geq 0$ e $F = (F_1, \ldots, F_N)$ tais que

$$\min \ \mathrm{tr} \left\{ \sum_{i=1}^{N} D^* X_i D \right\}$$

sujeito a (6.3).

A abordagem utilizada para resolver o problema nesta seção permite que se relaxe parcialmente a hipótese inicial de que a matriz de probabilidades de transição associada ao sistema markoviano seja precisamente conhecida. Portanto aqui se assumirá que a matrix P não é exatamente conhecida, mas que pertence a um conjunto convexo $\mathbb{P}$ definido como

$$\mathbb{P} := \{P; P = \sum_{t=1}^{q} \alpha_t P^t \text{ com } \alpha_t \geq 0, \sum_{t=1}^{q} \alpha_t = 1\},$$

onde $P^t = [p_{ij}^t]$, $t = 1, \ldots, q$ são matrizes de probabilidades de transição conhecidas.

Seja então a seguinte definição.

> **Definição 6.3:** $F = (F_1, \ldots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$ *estabiliza robustamente* o par (A, B) em $\mathbb{P}$ se o sistema (6.1) com $u(k) = F_{\theta(k)} x(k)$ para $\theta(k)$ assumindo valores no conjunto $\{1, \ldots, N\}$ é estável na média quadrática para toda $P \in \mathbb{P}$.

O problema de controle que se deseja resolver é o seguinte: dado $\nu > 0$, encontre F que estabilize robustamente (A, B) e que minimize ζ sujeito a $\|\Sigma_F\|_2 \leq \zeta$ e $\|\Sigma_F\|_\infty \leq \nu$ para toda $P \in \mathbb{P}$. Na sequência se mostrará que uma aproximação para esse problema pode ser obtida através de um problema de otimização convexo sujeito a DML´s.

Seja então

$$\Gamma_i^t := [\sqrt{p_{i1}^t} I \cdots \sqrt{p_{iN}^t} I] \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^{Nn}, \mathbb{C}^n) \text{ para } i = 1, \ldots, N \text{ e } t = 1, \ldots, q.$$

Define-se o seguinte problema de otimização.

> **Definição 6.4:** O seguinte problema de otimização será denominado *problema I*:
> Seja $\mu = \nu^2$. Obtenha $X = (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{G}^n$, $Q = (Q_1, \ldots, Q_N) \in \mathbb{G}^n$,
> $L = (L_1, \ldots, L_N) \in \mathbb{G}^n$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_N) \in \mathbb{G}^{n,m}$ tais que

$$\xi = \min \operatorname{tr} \left\{ \sum_{i=1}^{N} D^* X_i D \right\} \tag{6.4.a}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} Q_i & Q_i A_i^* + Y_i^* B_i^* & Q_i M_i^* & Y_i^* J_i^* & D \\ A_i Q_i + B_i Y_i & L_i & 0 & 0 & 0 \\ M_i Q_i & 0 & I & 0 & 0 \\ J_i Y_i & 0 & 0 & I & 0 \\ D^* & 0 & 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} \geq 0 \text{, para } i = 1, \ldots, N \tag{6.4.b}$$

$$\begin{bmatrix} L_i & L_i \Gamma_i^t \\ \Gamma_i^{t*} L_i & \operatorname{diag}\{Q\} \end{bmatrix} \geq 0 \text{, para } i = 1, \ldots, N,\ t = 1, \ldots, q \tag{6.4.c}$$

$$\begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Q_i \end{bmatrix} \geq 0 \text{, para} i = 1, \ldots, N \tag{6.4.d}$$

$$X_i = X_i^* > 0 \text{, para } i = 1, \ldots, N \tag{6.4.e}$$

$$Q_i = Q_i^* > 0 \text{, para } i = 1, \ldots, N \tag{6.4.f}$$

$$L_i = L_i^* > 0 \text{, para } i = 1, \ldots, N, \tag{6.4.g}$$

onde $\operatorname{diag}\{Q\} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{Nn})$ é a matriz formada por $Q_1, \ldots, Q_N$ na diagonal e zero nas posições restantes.

Note que o problema da definição acima é expresso em termos de μ e não de ν para que ele se mantenha em uma forma afim.

O resultado a seguir apresenta a conexão entre o problema I e o teorema 6.2.

Teorema 6.5: Suponha que o problema I tenha uma solução X, Q, L e Y. Sejam

$$F = (F_1, \ldots, F_N), \text{ com } F_i = Y_i Q_i^{-1} \text{ para } i = 1, \ldots, N \text{ e } \xi = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr}\{D^* X_i D\}.$$

Então F estabiliza robustamente (A, B) e $\|\Sigma_F\|_2 \leq \zeta$ e $\|\Sigma_F\|_\infty \leq \nu$ para todo $P \in \mathbb{P}$.

Prova: Inicialmente note que, pelo complemento de Schur (veja o comentário 2.1 na página 10), (6.4.b), (6.4.c) e (6.4.d) são equivalentes a

$$\begin{aligned} Q_i \geq\ & Q_i(A_i + B_iF_i)^* L_i^{-1}(A_i + B_iF_i)Q_i + \\ & Q_i(M_i + J_iF_i)^*(M_i + J_iF_i)Q_i + \frac{1}{\mu}Q_i(Q_i^{-1})D^* D(Q_i^{-1})Q_i \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$L_i \geq L_i\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^t Q_j^{-1}\right)L_i \text{ para } t = 1, \ldots, q \tag{6.6}$$

$$X_i \geq Q_i^{-1} \tag{6.7}$$

para $i = 1, \ldots, N$. Uma vez que se está minimizando $\text{tr}\sum_{i=1}^{N} D^* X_i D$ e que, por hipótese, $DD^* > 0$, deve-se ter de (6.7) que $X_i = Q_i^{-1}$.

Considere um valor arbitrário de $P \in \mathbb{P}$. Por definição $p_{ij} = \sum_{t=1}^{q} \alpha_t p_{ij}^t$, onde α_t é tal que $\alpha_t \geq 0$, $\sum_{t=1}^{q} \alpha_t = 1$. Portanto, de (6.6), tem-se que

$$L_i^{-1} \geq \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^t Q_j^{-1} = \mathcal{E}_i(X) \text{ para } i = 1, \ldots, N,$$

e de (6.5),

$$\begin{aligned} X_i = Q_i^{-1} \geq\ & (A_i + B_iF_i)^* L_i^{-1}(A_i + B_iF_i) + \\ & (M_i + J_iF_i)^*(M_i + J_iF_i) + \frac{1}{\mu}Q_i D^* DQ_i \\ \geq\ & (A_i + B_iF_i)^* \mathcal{E}_i(X)(A_i + B_iF_i) + \\ & (M_i + J_iF_i)^*(M_i + J_iF_i) + \frac{1}{\mu}Q_i D^* DQ_i \end{aligned} \tag{6.8}$$

para $i = 1, \ldots, N$. Finalmente, o resultado desejado segue de (6.8), da proposição 2.6 e do teorema 6.2.

□

O que o teorema acima mostra é que, uma vez que se considere apenas matrizes reais (porém sem perda de generalidade, como mencionado no comentário 2.12 da página 16), basta resolver o problema I para se obter uma lei de controle que satisfaça às condições do teorema 6.2. O problema de otimização é convexo, e portanto pode-se fazer uso dos algoritmos computacionais usuais para esse tipo de problema.

A subseção a seguir trata de uma extensão imediata da abordagem apresentada acima, isto é, uma aproximação para o controle H_∞.

6.3.2 O controle H_∞

Suponha que se deseje agora minimizar a norma H_∞ ao invés da norma H_2. Nesse caso o valor de μ se torna uma variável no problema I da definição 6.4, resultando então no problema de otimização expresso na definição a seguir.

Definição 6.6: O seguinte problema de otimização será denominado *problema II*:
Obtenha $Q = (Q_1, \ldots, Q_N) \in \mathbb{G}^n$, $L = (L_1, \ldots, L_N) \in \mathbb{G}^n$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_N) \in \mathbb{G}^{n,m}$ tais que

$$\xi = \min \{\mu\} \tag{6.9.a}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} Q_i & Q_iA_i^* + Y_i^*B_i^* & Q_iM_i^* & Y_i^*J_i^* & D \\ A_iQ_i + B_iY_i & L_i & 0 & 0 & 0 \\ M_iQ_i & 0 & I & 0 & 0 \\ J_iY_i & 0 & 0 & I & 0 \\ D^* & 0 & 0 & 0 & \mu I \end{bmatrix} \geq 0, \text{ para } i = 1, \ldots, N \tag{6.9.b}$$

$$\begin{bmatrix} L_i & L_i\Gamma_i^t \\ \Gamma_i^{t*}L_i & \text{diag}\{Q\} \end{bmatrix} \geq 0, \text{ para } i = 1, \ldots, N,\ t = 1, \ldots, q \tag{6.9.c}$$

$$Q_i = Q_i^* > 0, \text{ para } i = 1, \ldots, N \tag{6.9.d}$$

$$L_i = L_i^* > 0, \text{ para } i = 1, \ldots, N, \tag{6.9.e}$$

onde $\text{diag}\{Q\} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{Nn})$ é como no problema I.

Note que a função objetivo do problema de otimização (equação (6.9.a)) foi trocada em relação ao problema I. Note também que como no problema II não há nenhuma preocupação com o valor da norma H_2, X foi retirada do problema, de modo que neste caso não há nenhuma inequação equivalente a (6.4.d) do problema I.

É mais ou menos imediato que o problema II, como o problema I, leva a uma lei de controle que estabiliza robustamente o sistema descrito por (6.1). Basta notar que as partes dos problemas que envolvem estabilidade se encontram basicamente nas restrições dadas por (6.4.b) e (6.4.c) para o problema I e (6.9.b) e (6.9.c) para o problema II.

Da mesma forma, a solução obtida também pode ser conservadora, como no caso do problema misto.

6.4 Conclusões

Este capítulo apresentou um método para se resolver o problema de controle misto H_2/H_∞ para sistemas lineares discretos sujeitos a saltos markovianos. Uma aproximação para o problema permitiu que se associasse a este um problema de programação convexa, que pode ser resolvido numericamente com relativa facilidade. Por outro lado, um efeito negativo introduzido por essa aproximação é que a solução obtida pode ser conservadora. Quão conservadora não se pode determinar, pois não há outro método na literatura (pelo menos ainda) para resolver o mesmo problema.

O problema de controle H_∞ pôde ser considerado dentro da mesma abordagem, como visto na subseção 6.3.2. Como no caso anterior, a solução obtida também pode ser conservadora, porém o algoritmo apresentado na seção 5.4 (na página 62) pode ser utilizado para comparação.