capítulo 5

Equações algébricas de Riccati acopladas para controle H_∞

5.1 Sobre este capítulo

Neste capítulo se tratará do uso de equações algébricas de Riccati acopladas (EARA) para resolução do problema de controle H_∞ para sistemas lineares a tempo discreto sujeitos a saltos markovianos (veja [17]). As EARA que surgem nesse tipo de problema diferem das equações consideradas nos capítulos 3 e 4, basicamente pelo fato de não se poder mais supor que $\mathbb{M} \neq \emptyset$ (veja a definição desse conjunto na página 27). Como essa era uma hipótese básica para todos os resultados obtidos naquele capítulo, eles não podem ser aplicados diretamente ao caso

O problema é resolvido aqui com o uso de um algoritmo recursivo, que pode ser visto como uma adaptação de um algoritmo apresentado em [53] para o caso determinístico. O algoritmo, estendido para o caso markoviano, é apresentado na seção 5.4, ao final deste capítulo, enquanto que as seções 5.2 e 5.3, a seguir, apresentam o desenvolvimento teórico e os resultados obtidos que permitiram que ele fosse obtido. A seção 5.5 conclui a discussão sobre controle recapitulando os resultados apresentados.

Na literatura, o problema de controle dentro de um contexto markoviano é discutido em [22] e [45] para tempo contínuo, e em [25] e [17] para tempo discreto. [25] apresenta condições sufi-

cientes para a existência de uma solução, enquanto que em [17] são obtidas condições necessárias e suficientes para a existência de um controlador por realimentação de estado que estabiliza um dado sistema no sentido da média quadrática e garante que, para qualquer sequência de perturbações l_2-aditivas, a saída do sistema seja menor que um certo valor pré-especificado. Esses resultados, apresentados aqui como o lema 5.1 e o teorema 5.2, formam a base teórica do algoritmo da seção 5.4.

5.2 Preliminares

Considere o seguinte sistema linear a tempo discreto sujeito a saltos markovianos

$$\Sigma = \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) + D_{\theta(k)}\omega(k) \\ z(k) = M_{\theta(k)}x(k) + J_{\theta(k)}u(k) \\ x(0) = x_0 \qquad \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

com $D = (D_1, \ldots, D_N) \in \mathbb{H}^{r,n}$, $M = (M_1, \ldots, M_N) \in \mathbb{H}^{n,s}$, $J = (J_1, \ldots, J_N) \in \mathbb{H}^{m,s}$ e com $J_i^* J_i > 0$ para $i = 1, \ldots, N$. $\theta(k)$ denota uma cadeia de Markov assumindo valores dentro do conjunto $\{1, \ldots, N\}$.

Por simplicidade se assumirá que $J_i^* J_i = I$ e que $M_i^* J_i = 0$ para $i = 1, \ldots, N$. Conforme mencionado em [17], isso pode ser feito sem perda de generalidade para o tratamento do problema de controle H_∞.

Sejam

$$\mathcal{X}(\theta_0, x_0, \omega, u) = (x(0), x(1), \ldots) \text{ e}$$
$$\mathcal{Z}(\theta_0, x_0, \omega, u) = (z(0), z(1), \ldots),$$

onde $u = (u(0), u(1), \ldots)$, $\omega = (\omega(0), \omega(1), \ldots)$ e $x(k)$ e $z(k)$ são dados pelas equações (5.1). Note que $\mathcal{X}(\theta_0, ., ., .)$ e $\mathcal{Z}(\theta_0, ., ., .)$ são operadores lineares.

Considere então as equações (5.1) com $u(k)$ dado por $u(k) = F_{\theta(k)}x(k)$ (ou seja, o sistema em malha fechada) e denote esse sistema por Σ_F.

$$\overline{\mathcal{L}}(.) = (\overline{\mathcal{L}}_1(.), \ldots, \overline{\mathcal{L}}_N(.)), \text{ com } \overline{\mathcal{L}}_i(.) = (A_i + B_i F_i)^* \mathcal{E}_i(.)(A_i + B_i F_i),$$
$$\mathcal{X}_F(\theta_0, \omega) = (0, x(1), \ldots),$$
$$\mathcal{Z}_F(\theta_0, \omega) = (0, z(1), \ldots).$$

Com isso se pode apresentar o seguinte lema, proposto originalmente em [17]:

Lema 5.1: (provado em [17], equivalente à proposição 2.16 na página 22) $r_\sigma(\overline{\mathcal{L}}) < 1$ se e somente se $\mathcal{X}_F(\theta_0, .) \in l_2^n$ para qualquer $\omega \in l_2^r$.

Conforme comentado no capítulo 2, este resultado mostra que $\mathcal{X}_F(\theta_0, .)$ e $\mathcal{Z}_F(\theta_0, .)$ pertencem a $\mathbb{B}(l_2^r, l_2^n)$ e $\mathbb{B}(l_2^r, l_2^s)$ respectivamente, o que permite que se defina a norma induzida abaixo.

$$\left\|\mathcal{Z}(\theta_0, .)\right\| := \sup_{\omega \in l_2^r} \quad \frac{\left\|\mathcal{Z}(\theta_0, \omega)\right\|_2}{\|\omega\|_2}.$$

O seguinte teorema, de [17], trata do controle H_∞ para sistemas discretos sujeitos a saltos markovianos, como nas equações (5.1). Para a sequência, seja $Q_i = M_i^* M_i$, $i = 1, \ldots, N$

Teorema 5.2: Suponha que (M, A) seja detectável na média quadrática e seja $\nu > 0$ fixado. Então existe $F = (F_1, \ldots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$ que estabiliza (A, B) na média quadrática e tal que $\left\|\mathcal{Z}_F(\theta_0, .)\right\| < \nu$ para todo θ_0 se e somente se existir $X = (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{H}^{n+}$ satisfazendo as seguintes condições:

i) $$I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X) D_i > 0 \text{ para } i = 1, \ldots, N. \tag{5.2.a}$$

ii)

$$\begin{aligned} X_i = {} & Q_i + A_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i - \\ & A_i^* \mathcal{E}_i(X) \begin{bmatrix} B_i & \frac{1}{\nu} D_i \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i^* \\ \frac{1}{\nu} D_i^* \end{bmatrix} \mathcal{E}_i(X) \begin{bmatrix} B_i & \frac{1}{\nu} D_i \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_i^* \\ \frac{1}{\nu} D_i^* \end{bmatrix} \mathcal{E}_i(X) A_i = \\ = {} & Q_i + \left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\nu} D_i \right)^* \mathcal{E}_i(X) \left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\nu} D_i \right) + F_i^* F_i - G_i^* G_i \end{aligned} \tag{5.2.b}$$

para $i = 1, \ldots, N$, sendo que

$$\begin{aligned} F_i = {} & -\left(I + B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + \frac{1}{\nu^2} B_i^* \mathcal{E}_i(X) D_i \left(I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X) D_i \right)^{-1} D_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i \right)^{-1} \\ & \left(B_i^* \left(I - \frac{1}{\nu^2} \mathcal{E}_i(X) D_i \left(I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X) D_i \right)^{-1} D_i^* \right) \mathcal{E}_i(X) A_i \right) = \\ = {} & -(I + B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i)^{-1} B_i^* \mathcal{E}_i(X) \left(A_i + \frac{1}{\nu} D_i^* G_i \right), \end{aligned} \tag{5.2.c}$$

$$G_i = \left(I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X) D_i + \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i (I + B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i)^{-1} B_i^* \mathcal{E}_i(X) D_i\right)^{-1}$$
$$\left(\frac{1}{\nu^2} D_i^* (I - \mathcal{E}_i(X) B_i (I + B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i)^{-1} B_i^*) \mathcal{E}_i(X) A_i\right) =$$
$$= \left(I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X) D_i\right)^{-1} \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X)(A_i + B_i F_i)\,. \tag{5.2.d}$$

iii) $r_\sigma(\mathcal{L}) < 1$, onde $\mathcal{L}(.) = (\mathcal{L}_1(.), \ldots, \mathcal{L}_N(.))$ é definido como

$$\mathcal{L}_i(.) = \left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\nu} D_i G_i\right)^* \mathcal{E}_i(.)\left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\nu} D_i G_i\right). \tag{5.2.e}$$

para $i = 1, \ldots, N$.

O teorema acima fornece condições necessárias e suficientes para a existência de solução para o problema de controle H_∞. Note que se assume que o estado do sistema (em todas as suas componentes) é conhecido, bem como o valor da cadeia de Markov $\theta(k)$ no instante de tempo k.

Tendo em vista as equações (5.2.a) e (5.2.b), pode-se notar que realmente os resultados do capítulo 3 não podem ser aplicados diretamente para o problema H_∞.

Note também, que como $\theta_0 \in \{1, \ldots, N\}$, um conjunto finito, segue que $\|\Sigma_F\|_\infty < \nu$ se e somente se $\|\mathcal{Z}(\theta_0, .)\| < \nu$ para todo $\theta_0 \in \{1, \ldots, N\}$.

Comentário 5.3: A condição de que (M, A) seja detectável na média quadrática, juntamente com a estabilizabilidade de (A, B) é usada apenas para garantir a existência de uma solução estabilizante no sentido da média quadrática para as EARA (veja o teorema 4.6 na página 38) dadas por

$$X_i = Q_i + A_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i - A_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i (B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + I)^{-1} B_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i \tag{5.3}$$

para $i = 1, \ldots, N$.

Tendo em vista o teorema 4.7, a detectabilidade na média quadrática do par (M, A) pode ser substituída pela seguinte condição: para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, uma das condições abaixo deve ser satisfeita:

i) $(Q_i^{1/2}, p_{ii} A_i)$ não tem modos não-observáveis dentro do disco complexo unitário, ou

ii) $(Q_i^{1/2}, p_{ii} A_i)$ não tem modos não-observáveis sobre o disco complexo unitário, 0 não é um modo não-observável de $(Q_i^{1/2}, p_{ii} A_i)$ e $\zeta(i) < \infty$, onde $\zeta(i)$ é como no teorema 4.7.

O próximo resultado mostra que $F = (F_1, \ldots, F_N)$, como definida em (5.2.c), estabiliza (A, B) no sentido da média quadrática.

Lema 5.4: Suponha que $X = (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{H}^{n+}$ satisfaz as equações (5.2.a)-(5.2.e), e seja $\overline{\mathcal{L}}(.) = (\overline{\mathcal{L}}_1(.), \ldots, \overline{\mathcal{L}}_N(.))$, com $\overline{\mathcal{L}}_i(.) = (A_i + B_i F_i)^* \mathcal{E}_i(.)(A_i + B_i F_i)$. Então $r_\sigma(\overline{\mathcal{L}}) < 1$.

Prova: Fazendo-se algumas manipulações algébricas, tem-se que

$$X_i - (A_i + B_i F_i)^* \mathcal{E}_i(X)(A_i + B_i F_i) = Q_i + F_i^* F_i + G_i^* \left(I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X) D_i \right) G_i \geq \alpha G_i^* G_i$$

para algum $\alpha > 0$ e $i = 1, \ldots, N$, considerando que $Q_i \geq 0$ e $I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X) D_i > 0$. Fazendo

$$\tilde{F}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ G_i \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} B_i & \frac{1}{\nu} D_i \end{bmatrix}$$

tem-se que

$$X_i - (A_i + \tilde{B}_i \tilde{F}_i)^* \mathcal{E}_i(X)(A_i + \tilde{B}_i \tilde{F}_i) \geq \alpha (\tilde{F}_i - \tilde{G}_i)^* (\tilde{F}_i - \tilde{G}_i) \text{ para } i = 1, \ldots, N.$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(.) &= \left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\nu} D_i G_i \right)^* \mathcal{E}_i(.) \left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\nu} D_i G_i \right) \\ &= (A_i + B_i \tilde{G}_i)^* \mathcal{E}_i(.)(A_i + B_i \tilde{G}_i) \end{aligned}$$

com $r_\sigma(\mathcal{L}) < 1$ (da equação (5.2.e)), tem-se do lema 2.13 da página 17, que $r_\sigma(\overline{\mathcal{L}}) < 1$ -.

□

São definidos então os operadores abaixo para $V = (V_1, \ldots, V_N) \in \mathbb{H}^{n+}$ tais que para $i = 1, \ldots, N$, $I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(V) D_i > 0$.

Definição 5.5: Sejam $\mathcal{M}(V) = (\mathcal{M}_1(V), \ldots, \mathcal{M}_N(V))$, $\mathcal{N}(V) = (\mathcal{N}_1(V), \ldots, \mathcal{N}_N(V))$,

$\mathcal{W}(V) = (\mathcal{W}_1(V), \ldots, \mathcal{W}_N(V))$ e $\mathcal{V}(V) = (\mathcal{V}_1(V), \ldots, \mathcal{V}_N(V))$ dados por

$$\mathcal{M}_i(V) := Q_i + A_i^* \mathcal{E}_i(V) A_i -$$
$$A_i^* \mathcal{E}_i(V) \begin{bmatrix} B_i & \frac{1}{\nu} D_i \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i^* \\ \frac{1}{\nu} D_i^* \end{bmatrix} \mathcal{E}_i(V) \begin{bmatrix} B_i & \frac{1}{\nu} D_i \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_i^* \\ \frac{1}{\nu} D_i^* \end{bmatrix} \mathcal{E}_i(V) A_i$$

$$\mathcal{W}_i(V) := I + B_i^* \mathcal{E}_i(V) B_i$$

$$\mathcal{N}_i(V) := \nu^2 \left(I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(V) D_i + \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(V) B_i (I + B_i^* \mathcal{E}_i(V) B_i)^{-1} B_i^* \mathcal{E}_i(V) D_i \right)$$

$$\mathcal{V}_i(V) := D_i^* (I - \mathcal{E}_i(V) B_i (I + B_i^* \mathcal{E}_i(V) B_i)^{-1} B_i^*) \mathcal{E}_i(V) A_i$$

para $i = 1, \ldots, N$.

Pode-se mostrar (os cálculos são diretos, porém longos) que para $i = 1, \ldots, N$, $x_0 \in \mathbb{C}^n$, $u_0 \in \mathbb{C}^m$, $\omega_0 \in \mathbb{C}^r$,

$$\|M_i x_0\|^2 + \|u_0\|^2 - \nu^2 \|\omega_0\|^2 + (A_i x_0 + B_i u_0 + D_i \omega_0)^* \mathcal{E}_i(V)(A_i x_0 + B_i u_0 + D_i \omega_0) =$$
$$x_0^* \mathcal{M}_i(V) x_0 + \left\| \mathcal{W}_i(V)^{1/2} (u_0 + \hat{u}(V, i, x_0, \omega_0)) \right\|^2 - \left\| \mathcal{N}_i(V)^{1/2} (\omega_0 - \hat{\omega}(V, i, x_0)) \right\|^2, \quad (5.4)$$

onde

$$\hat{\omega}(V, i, x_0) = \mathcal{N}_i(V)^{-1} \mathcal{V}_i(V) x_0,$$
$$\hat{u}(V, i, x_0, \omega_0) = \mathcal{W}_i(V)^{-1} (B_i^* \mathcal{E}_i(V) A_i x_0 + B_i^* \mathcal{E}_i(V) D_i \omega_0). \quad (5.5)$$

5.3 Resultado principal

O teorema abaixo apresenta o resultado principal deste capítulo, que permite que se projete um controlador que satisfaça as hipóteses enunciadas para o problema de controle H_∞.

Teorema 5.6: Suponha que (M, A) seja detectável na média quadrática ou que as condições alternativas citadas no comentário 5.3 sejam satisfeitas. Suponha que, além disso, exista $X = (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{H}^{n+}$ satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) do teorema 5.2 (equações (5.2.a)-(5.2.e)).

Seja também para $\kappa = 0, 1, \ldots$, $X^{\kappa+1} = \mathcal{M}(X^\kappa)$, onde X^0 é a solução máxima das EARA (5.3).

Então X^{κ} converge para X exponencialmente à medida que κ tende a infinito.

Prova: Inicialmente note do lema 5.4, que $F = (F_1, \ldots, F_N)$, como definida em (5.2.c) estabiliza (A, B) na média quadrática e que portanto (A, B) é estabilizável na média quadrática. Da detectabilidade de (M, A) (ou das condições do comentário 5.3), tem-se que existe uma solução estabilizante no sentido da média quadrática X^0 para as EARA (5.3), solução esta que é também máxima.

Após algumas manipulações algébricas obtém-se as seguintes equações:

$$(X_i - X_i^0) - (A_i + B_i F_i)^* \mathcal{E}_i(X - X^0)(A_i + B_i F_i) =$$
$$G_i^* \left(I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X) D_i \right) G_i + (F_i - F_i^0)^* (I + B_i^* \mathcal{E}_i(X^0) B_i)(F_i - F_i^0)$$

para $i = 1, \ldots, N$, onde $F^0 = (F_1^0, \ldots, F_N^0)$ é dado por

$$F_i^0 = -(I + B_i^* \mathcal{E}_i(X^0) B_i)^{-1} B_i^* \mathcal{E}_i(X^0) A_i \text{ para } i = 1, \ldots, N.$$

Como F estabiliza (A, B) na média quadrática, tem-se da proposição 2.6 na página 12 que $X - X^0 \geq 0$, o que também mostra que $I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X^0) D_i \geq I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X) D_i > 0$ para $i = 1, \ldots, N$.

A prova segue por indução. Deseja-se mostrar que $X^0 \leq X^{\kappa} \leq X^{\kappa+1} \leq X$, e que portanto $I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X^{\kappa}) D_i \geq I - \frac{1}{\nu^2} D_i^* \mathcal{E}_i(X) D_i > 0$. Para $\kappa = 0$, já foi mostrado que $X^0 \leq X$. Seja então

$$x(1) = A_i x_0 + B_i u_0 + D_i \omega_0 .$$

Tem-se da equação (5.4) que

$$\begin{aligned} x_0^* X_i^1 x_0 &= \sup_{\omega_0} \inf_{u_0} \{ \|M_i x_0\|^2 + \|u_0\|^2 - \nu^2 \|\omega_0\|^2 + x(1)^* \mathcal{E}_i(X^0) x(1) \} \geq \\ &\geq \inf_{u_0} \{ \|M_i x_0\|^2 + \|u_0\|^2 + (A_i x_0 + B_i u_0)^* \mathcal{E}_i(X^0)(A_i x_0 + B_i u_0) \} = \\ &= x_0^* X_i^0 x_0 \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} x_0^* X_i^1 x_0 &= \sup_{\omega_0} \inf_{u_0} \{ \|M_i x_0\|^2 + \|u_0\|^2 - \nu^2 \|\omega_0\|^2 + x(1)^* \mathcal{E}_i(X^0) x(1) \} \leq \\ &\leq \sup_{\omega_0} \inf_{u_0} \{ \|M_i x_0\|^2 + \|u_0\|^2 - \nu^2 \|\omega_0\|^2 + x(1)^* \mathcal{E}_i(X) x(1) \} = \\ &= x_0^* \mathcal{M}_i(X) x_0 = x_0^* X_i x_0 \end{aligned}$$

pois $\mathcal{M}(X) = X$. Dessa forma $X^0 \leq X^1 \leq X$.

Continuando com o argumento de indução, suponha agora que $X^{\kappa-1} \leq X^{\kappa} \leq X$. Resta então mostrar que $X^{\kappa} \leq X^{\kappa+1} \leq X$. A partir da equação (5.4) tem-se que

$$\begin{aligned} x_0^* X_i^{\kappa+1} x_0 &= \sup_{\omega_0} \inf_{u_0} \{\|M_i x_0\|^2 + \|u_0\|^2 - \nu^2\|\omega_0\|^2 + x(1)^* \mathcal{E}_i(X^{\kappa}) x(1)\} \geq \\ &\geq \sup_{\omega_0} \inf_{u_0} \{\|M_i x_0\|^2 + \|u_0\|^2 - \nu^2\|\omega_0\|^2 + x(1)^* \mathcal{E}_i(X^{\kappa-1}) x(1)\} = \\ &= x_0^* X_i^{\kappa} x_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_0^* X_i^{\kappa+1} x_0 &= \sup_{\omega_0} \inf_{u_0} \{\|M_i x_0\|^2 + \|u_0\|^2 - \nu^2\|\omega_0\|^2 + x(1)^* \mathcal{E}_i(X^{\kappa}) x(1)\} \leq \\ &\leq \sup_{\omega_0} \inf_{u_0} \{\|M_i x_0\|^2 + \|u_0\|^2 - \nu^2\|\omega_0\|^2 + x(1)^* \mathcal{E}_i(X) x(1)\} = \\ &= x_0^* X_i x_0, \end{aligned}$$

o que mostra que realmente $X^{\kappa} \leq X^{\kappa+1} \leq X$. Portanto de [56] (página 79), existe $X \in \mathbb{H}^{n+}$ tal que X^{κ} converge para X à medida que κ tende a infinito. Considere agora a equação (5.1) com $\omega = (\omega(0), \ldots) \in l_2^r$ e o seguinte problema de otimização

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \quad \sum_{k=0}^{\infty} E\{\|z(k)\|^2\}$$

onde $\mathbb{U} := \{u = (u(0), \ldots) \in l_2^m$ tal que $x = (x(0), \ldots) \in l_2^n$ para todo $\omega = (\omega(0), \ldots) \in l_2^r$, onde x é dado pelas equações (5.1) $\}$. Está mostrado em [18] (veja também [17]) que existe $\mathcal{U}(\theta_0, ., .) \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^n \times l_2^r, l_2^m)$ tal que $\mathcal{U}(\theta_0, x_0, \omega) \in \mathbb{U}$ e $u = (u(0), \ldots) = \mathcal{U}(\theta_0, x_0, \omega)$ resolve o problema de otimização acima.

Para $\omega \in l_2^r$ e $u \in \mathbb{U}$ arbitrários, tem-se das equações (5.1), (5.4) e (5.5) que

$$E(x_0^* X_{\theta_0} x_0) - E(x(\nu+1)^* X_{\theta(\nu+1)} x(\nu+1)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} E(x(k)^* X_{\theta(k)} x(k) - x(k+1)^* X_{\theta(k+1)} x(k+1)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} E(E(x(k)^* X_{\theta(k)} x(k) - x(k+1)^* X_{\theta(k+1)} x(k+1) \big| \Im_k)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{v} E(x(k)^{*} X_{\theta(k)} x(k) - x(k+1)^{*} \mathcal{E}_{\theta(k)}(X) x(k+1)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{v} E(\|z(k)\|^2 - \nu^2 \|\omega(k)\|^2) -$$

$$\sum_{k=0}^{v} E(\left\|\mathcal{W}_{\theta(k)}(X)^{1/2}(u(k) + \hat{u}(X, \theta(k), x(k), \omega(k)))\right\|^2) +$$

$$\sum_{k=0}^{v} E(\left\|\mathcal{N}_{\theta(k)}(X)^{1/2}(\omega(k) - \hat{\omega}(X, \theta(k), x(k)))\right\|^2).$$

Lembrando que $u \in \mathbb{U}$ e $\omega \in l_2^r$ o que garante que $E(\|x(k)\|^2)$ vai a zero quando k tende a infinito, tem-se que

$$\sum_{k=0}^{\infty} E(\|z(k)\|^2 - \nu^2 \|\omega(k)\|^2) = E(x_0^{*} X_{\theta_0} x_0) +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} E(\left\|\mathcal{W}_{\theta(k)}(X)^{1/2}(u(k) + \hat{u}(X, \theta(k), x(k), \omega(k)))\right\|^2) +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} E(\left\|\mathcal{N}_{\theta(k)}(X)^{1/2}(\omega(k) - \hat{\omega}(X, \theta(k), x(k)))\right\|^2).$$

Do exposto acima, tem-se que

$$E(x_0^{*} X_{\theta_0} x_0) = \sup_{\omega \in l_2^r} \inf_{u \in \mathbb{U}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} E(\|z(k)\|^2 - \nu^2 \|\omega(k)\|^2) \right\} = \tag{5.6}$$

$$= \left\| \mathcal{Z}(\theta_0, x_0, \hat{\omega}, \mathcal{U}(\theta_0, x_0, \hat{\omega})) \right\|_2^2 - \nu^2 \left\| \hat{\omega} \right\|_2^2,$$

com $\hat{\omega} = (\hat{\omega}(0), \hat{\omega}(1), \ldots)$, $\hat{\omega}(k) = \frac{1}{\nu} G_{\theta(k)} \hat{x}(k)$, $\mathcal{U}(\theta_0, x_0, \hat{\omega}) = \hat{u} = (\hat{u}(0), \hat{u}(1), \ldots)$ $\hat{u}(k) = F_{\theta(k)} \hat{x}(k)$, sendo que $\hat{x}(k)$ é obtido a partir das relações abaixo:

$$\hat{x}(k+1) = \left(A_{\theta(k)} + B_{\theta(k)} F_{\theta(k)} + \frac{1}{\nu} G_{\theta(k)} \right) \hat{x}(k)$$

$$\hat{x}(0) = x_0 \qquad \theta(0) = \theta_0$$

Definindo $l_2^{r,\kappa} := \{ \omega = (\omega(0), \omega(1), \ldots) \in l_2^r;\ \omega(k) = 0 \text{ para } \kappa \geq k \}$, tem-se, de maneira similar, que

$$E(x_0^* X_{\theta_0} x_0) = \sup_{\omega \in l_2^{r,\kappa}} \inf_{u \in \mathbb{U}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} E(\|z(k)\|^2 - \nu^2 \|\omega(k)\|^2) \right\} = \tag{5.7}$$

$$= \left\| \mathcal{Z}(\theta_0, x_0, \omega^\kappa, \mathcal{U}(\theta_0, x_0, \omega^\kappa)) \right\|_2^2 - \nu^2 \left\| \omega^\kappa \right\|_2^2,$$

onde $\omega^\kappa = (\omega^\kappa(0), \ldots, \omega^\kappa(\kappa-1), 0, \ldots)$ com

$$\omega^\kappa(k) = \mathcal{N}_{\theta(k)}(X^{\kappa-k-1})^{-1} \mathcal{V}_{\theta(k)}(X^{\kappa-k-1}) x(k)$$

e $u^\kappa = \mathcal{U}(\theta_0, x_0, \omega^\kappa) = (u^\kappa(0), u^\kappa(1), \ldots)$ com

$$u^\kappa(k) = \begin{cases} \mathcal{W}_{\theta(k)}(X^{\kappa-k-1})^{-1} B_{\theta(k)}^* \mathcal{E}_{\theta(k)}(X^{\kappa-k-1}) \\ \qquad (A_{\theta(k)} + D_{\theta(k)} \mathcal{N}_{\theta(k)}(X^{\kappa-k-1})^{-1} \mathcal{V}_{\theta(k)}(X^{\kappa-k-1})) x(k) \text{ para } k < \kappa \\ \\ \mathcal{W}_{\theta(k)}(X^0)^{-1} B_{\theta(k)}^* \mathcal{E}_{\theta(k)}(X^0) A_{\theta(k)} x(k) \text{ para } k \geq \kappa. \end{cases}$$

Seja $\hat{\omega}^\kappa = (\hat{\omega}^\kappa(0), \ldots, \hat{\omega}^\kappa(\kappa-1), 0, \ldots)$ com $\hat{\omega}^\kappa(k) = \hat{\omega}(k)$ para $k = 0, \ldots, \kappa-1$. Do fato que $r_\sigma(\mathcal{L}) < 1$ (conforme a equação (5.2.e)), tem-se que é possível encontrar $a > 0$, $0 < b < 1$ tais que $\|\mathcal{L}^k\| \leq a b^k$.

Além disso, tem-se que (veja a prova do lema 1 de [15])

$$\left\| \hat{\omega}(k) \right\|_2^2 = E\left(\frac{1}{\nu} \left\| G_{\theta(k)} \hat{x}(k) \right\|^2 \right) \leq c_1 E(\|\hat{x}(k)\|^2) \leq c_2 \|\mathcal{L}^k\| \|x_0\|_2^2 \leq c_3 b^k \|x_0\|_2^2$$

para constantes c_1, c_2, c_3 apropriadas. Portanto

$$\left\| \hat{\omega} - \hat{\omega}^\kappa \right\|_2^2 = \sum_{k=\kappa}^{\infty} \left\| \hat{\omega}(k) \right\|_2^2 \leq \frac{1}{1-b} c_3 b^k \|x_0\|_2^2.$$

De maneira similar, pode-se mostrar que $\left\| \mathcal{Z}(\theta_0, x_0, \hat{\omega}, \mathcal{U}(\theta_0, x_0, \hat{\omega})) \right\|_2^2 \leq c'_3 \|x_0\|_2^2$ para uma constante $c'_3 > 0$ apropriada.

Da equação (5.6) com $x_0 = 0$, tem-se que

$$0 = \sup_{\omega \in l_2^r} \{ \left\| \mathcal{Z}(\theta_0, x_0, \omega, \mathcal{U}(\theta_0, x_0, \omega)) \right\|_2^2 - \nu^2 \|\omega\|_2^2 \} \geq$$

$$\geq \left\| \mathcal{Z}(\theta_0, x_0, \hat{\omega} - \hat{\omega}^\kappa, \mathcal{U}(\theta_0, x_0, \hat{\omega} - \hat{\omega}^\kappa)) \right\|_2^2 - \nu^2 \left\| \hat{\omega} - \hat{\omega}^\kappa \right\|_2^2. \tag{5.8}$$

Das equações (5.6), (5.7) e (5.8) com $x_0 \in \mathbb{C}^n$ e $\theta_0 = i$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
x_0^* X_i^\kappa x_0 &\geq \left\| \mathcal{Z}(i, x_0, \hat{\omega}^\kappa, \mathcal{U}(i, x_0, \hat{\omega}^\kappa)) \right\|_2^2 - \nu^2 \left\| \hat{\omega}^\kappa \right\|_2^2 \\
&\geq \left\| \mathcal{Z}(i, x_0, \hat{\omega}, \mathcal{U}(i, x_0, \hat{\omega})) - \mathcal{Z}(i, x_0, \hat{\omega} - \hat{\omega}^\kappa, \mathcal{U}(i, x_0, \hat{\omega} - \hat{\omega}^\kappa)) \right\|_2^2 - \nu^2 \left\| \hat{\omega}^\kappa \right\|_2^2 \\
&\geq \left\| \mathcal{Z}(i, x_0, \hat{\omega}, \mathcal{U}(i, x_0, \hat{\omega})) \right\|_2^2 - \nu^2 \left\| \hat{\omega}^\kappa \right\|_2^2 - \\
&\quad 2 \left| \langle \mathcal{Z}(i, x_0, \hat{\omega}, \mathcal{U}(i, x_0, \hat{\omega})); \mathcal{Z}(i, x_0, \hat{\omega} - \hat{\omega}^\kappa, \mathcal{U}(i, x_0, \hat{\omega} - \hat{\omega}^\kappa)) \rangle \right| \\
&\geq x_0^* X_i x_0 - 2 \left\| \mathcal{Z}(i, x_0, \hat{\omega}, \mathcal{U}(i, x_0, \hat{\omega})) \right\|_2 \cdot \left\| \mathcal{Z}(i, x_0, \hat{\omega} - \hat{\omega}^\kappa, \mathcal{U}(i, x_0, \hat{\omega} - \hat{\omega}^\kappa)) \right\|_2 \\
&\geq x_0^* X_i x_0 - c_4 \left\| x_0 \right\|_2 \left\| \hat{\omega} - \hat{\omega}^\kappa \right\|_2 \\
&\geq x_0^* X_i x_0 - c_5 \left\| x_0 \right\|_2^2 b^{\kappa/2}
\end{aligned}
$$

para constantes c_4 e c_5 apropriadas. Portanto

$$
0 \leq \frac{1}{\left\| x_0 \right\|_2^2} x_0^* (X_i - X_i^\kappa) x_0 \leq c_5 b^{\kappa/2},
$$

o que mostra que X^κ converge para X exponencialmente quando κ tende a infinito.

□

5.4 Algoritmo proposto

O teorema 5.6, apresentado na seção anterior, remete diretamente a um algoritmo para se obter uma solução estabilizante X que satisfaça as equações (5.2.a)-(5.2.e).

Em resumo, o algoritmo é composto dos seguintes passos:

i) Resolva o problema de programação convexa dado pelas equações (3.5.a)-(3.5.d) (veja o capítulo 3, página 33) para as EARA (5.3). Denote a solução desse problema como X^0.

ii) Determine X^κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$ por meio da seguinte relação:

$$
X^\kappa = \mathcal{M}(X^{\kappa-1}) \qquad \text{(veja a definição 5.5).}
$$

iii) Se X^κ converge para algum X quando κ tende a infinito, verifique se a equação (5.2.a) é satisfeita e se $r_\sigma(\mathcal{L}) < 1$, onde $\mathcal{L}(.)$ é dado pela equação (5.2.e). Em caso afirmativo, X é a solução desejada. Caso não haja convergência ou a solução obtida não seja estabilizante ou se a equação (5.2.a) não for satisfeita, então não existe solução estabilizante para o problema.

O algoritmo acima é capaz de resolver o problema de controle H_∞ para um dado valor de ν caso o problema tenha solução. Se o problema não for factível pode ser necessário aumentar o valor de ν ou reformular o problema. Note que o algoritmo não é capaz, por si, de encontrar o valor mínimo de ν tal que o problema ainda tenha solução, porém, como se verá no próximo capítulo, é possível fazer algumas aproximações que possibilitam a obtenção de um valor ótimo para um problema aproximado.

5.5 Conclusões

Neste capítulo foi apresentado um enfoque que permite a resolução do problema de controle H_∞ para sistemas lineares discretos sujeitos a saltos markovianos quando se conhece o estado do sistema e o valor assumido pela cadeia de Markov associada. Tal enfoque faz uso de resultados apresentados no capítulo 3 e da extensão de alguns resultados da literatura de sistemas determinísticos (expressos basicamente no teorema 5.6) para obter a solução do problema.

O teorema 5.6 remete diretamente a um algoritmo adequado para implementação computacional, apresentado na seção 5.4. Tal algoritmo é capaz de obter recursivamente uma solução estabilizante, caso exista, para o problema de controle H_∞ para um valor de ν dado.