capítulo 4

Soluções estabilizantes para as EARA e o controle H_2

4.1 Sobre este capítulo

Este capítulo contém principalmente resultados sobre soluções estabilizantes para as equações algébricas de Riccati acopladas (EARA), sendo que a definição rigorosa para o que seja uma solução estabilizante será dada mais adiante. A próxima seção apresenta condições necessárias e suficientes para a existência de tais soluções em diversas formulações diferentes, enquanto a seção seguinte (seção 4.3) apresenta resultados relacionando a existência de uma solução estabilizante para as EARA com a existência de uma solução para o problema de controle H_2 e ainda com a existência de solução para um determinado problema de programação convexa. O capítulo é concluído então na seção 4.4 com alguns comentários.

4.2 Soluções estabilizantes para as EARA

Esta seção trata basicamente da obtenção de condições para a existência de soluções estabilizantes na média quadrática para as EARA (3.2) na página 25, as quais serão definidas de maneira rigorosa abaixo. A subseção 4.2.1 apresenta alguns resultados preliminares relacionados a soluções estabilizantes, enquanto que os resultados principais se encontram na subseção seguinte.

4.2.1 Preliminares sobre soluções establizantes

Definição 4.1: $X = (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{H}^n$ é dita uma solução estabilizante na média quadrática para as EARA (3.2) se , e , com

como em (2.4.b) na página 11, com para

.

O nome estabilizante se justifica, pois um controlador para o sistema projetado em função desse valor particular de será tal que o sistema será estável em malha fechada. O lema a seguir estabelece a unicidade da solução estabilizante na média quadrática se .

Lema 4.2: Se , então existe no máximo uma única solução estabilizante na média quadrática para as EARA (3.2), Esta, se existir, coincidirá com a solução máxima em .

Prova: Suponha que seja uma solução estabilizante na média quadrática para as EARA (3.2). Claramente é estabilizável na média quadrática, e uma vez que , tem-se do teorema 3.5 da página 29 que existe uma solução máxima . Tem-se então que para

,

e do lema 3.4 na página 29, equação (3.3.b),

para . Uma vez que tem-se que

para .

Combinando as duas últimas equações e considerando que é uma solução estabilizante na média quadrada, tem-se da proposição 2.6 na página 12, que . Isso, porém, implica em , e portanto . Do teorema 3.5, , o que mostra o resultado desejado.

O lema acima é extremamente importante para as técnicas expostas no capítulo 3, desenvolvidas em termos de soluções máximas para as EARA (3.2) nas condições deste lema (isto é),

estabelecendo uma equivalência entre soluções máximas e estabilizantes.

Na sequência, a notação abaixo será utilizada:

$$\mathcal{R}(X)^{1/2} := (\mathcal{R}_1(X)^{1/2}, \ldots, \mathcal{R}_N(X)^{1/2})$$
$$A + B\mathcal{F}(X) := (A_1 + B_1\mathcal{F}_1(X), \ldots, A_N + B_N\mathcal{F}_N(X)).$$

A definição a seguir será utilizada posteriormente na demonstração do teorema 4.7, na próxima subseção.

Definição 4.3: Considere $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N) \in \mathbb{H}^n$, com $r_\sigma(p_{ii}^{1/2}\Gamma_i) < 1$, $i = 1, \ldots, N$ e a matriz de probabilidades de transição $P = [p_{ij}]$. Define-se $\mathcal{A} \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$ da seguinte maneira: para $V = (V_1, \ldots, V_N) \in \mathbb{H}^n$, $\mathcal{A}(V) = (\mathcal{A}_i(V), \ldots, \mathcal{A}_N(V))$ é dado por

$$\mathcal{A}_i(V) := r_\sigma(p_{ii}^{1/2}\Gamma_i^*)^k \left(\Gamma_i^* \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{N} p_{ij} V_j \right) \Gamma_i \right) (p_{ii}^{1/2}\Gamma_i)^k . \tag{4.1}$$

Os dois lemas abaixo apresentam resultados auxiliares que serão úteis na sequência.

Lema 4.4: (provado em [13]) Considere $\mathcal{L}$ como em (2.4.b) e $\mathcal{A}$ como em (4.1). As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $r_\sigma(\mathcal{L}) < 1$;

ii) $r_\sigma(p_{ii}^{1/2}\Gamma_i) < 1$ para $i = 1, \ldots, N$ e $r_\sigma(\mathcal{A}) < 1$;

iii) $r_\sigma(p_{ii}^{1/2}\Gamma_i) < 1$ para $i = 1, \ldots, N$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k(H) < \infty$ para algum $H > 0$ em $\mathbb{H}^{n+}$.

Lema 4.5: Suponha que $\mathbb{M} \neq \emptyset$, (A, B) seja estabilizável na média quadrática, e para algum $X \in \mathbb{M}$, $(\mathcal{R}_i(X)^{1/2}, A_i + B_i\mathcal{F}_i(X))$ não tenha modos não-observáveis sobre o disco complexo unitário para $i = 1, \ldots, N$. Então $r_\sigma(p_{ii}^{1/2}A_i^+) < 1$ para $i = 1, \ldots, N$, onde $A_i^+ = A_i + B_i\mathcal{F}_i(X^+)$ e X^+ é a solução máxima das EARA (3.2) em $\hat{\mathbb{M}}$.

Prova: Das hipóteses do lema e do teorema 3.5, fica claro que existe uma solução máxima X^+ para as EARA (3.2) em $\hat{\mathbb{M}}$. Como visto no teorema 3.5, $r_\sigma(\mathcal{L}^+) \leq 1$, e daí é fácil verificar que $r_\sigma(p_{ii}^{1/2}A_i^+) \leq 1$ para $i = 1, \ldots, N$. Suponha, por contradição, que para algum i e algum $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\|\lambda\| = 1$ e algum $x \neq 0$ em $\mathbb{C}^n$,

$$p_{ii}^{1/2}A_i^+ x = \lambda x .$$

Do lema 3.4, equação (3.3.b), tem-se que

$$0 = x^*((X_i^+ - X_i) - p_{ii}A_i^{+*}(X_i^+ - X_i)A_i^+)x =$$
$$= x^*A_i^{+*}\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{N} p_{ij}(X_j^+ - X_j)\right)A_i^+x + x^*(\mathcal{R}_i(X) + (F_i^+ - F_i)^*D_i(F_i^+ - F_i))x$$

e uma vez que $X^+ - X \geq 0$, $D > 0$ e $\mathcal{R}(X) \geq 0$, se conclui que

$$x^*A_i^{+*}\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{N} p_{ij}(X_j^+ - X_j)\right)A_i^+x = 0$$
$$x^*\mathcal{R}_i(X)x = 0$$
$$x^*(F_i^+ - F_i)^*D_i(F_i^+ - F_i)x = 0,$$

o que implica em $\mathcal{R}_i(X)^{1/2}x = 0$ e $(F_i^+ - F_i)x = 0$. Portanto

$$p_{ii}^{1/2}(A_i + B_iF_i^+)x = p_{ii}^{1/2}(A_i + B_iF_i)x = \lambda x,$$

que é equivalente a dizer que λ é um modo não-observável de $(\mathcal{R}_i(X)^{1/2}, A_i + B_iF_i)$ sobre o disco complexo unitário, em contradição com a hipótese feita, o que prova o resultado desejado.

□

4.2.2 Resultados principais sobre soluções estabilizantes

Esta subseção apresenta dois teoremas e um corolário. O primeiro dos teoremas (teorema 4.6) apresenta condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução estabilizante no sentido da média quadrática para as EARA (3.2) quando $\mathbb{M} \neq \emptyset$. O teorema seguinte (teorema 4.7) substitui a hipótese de detectabilidade de $(\mathcal{R}(X)^{1/2}, A + B\mathcal{F}(X))$ por outras baseadas em seus modos observáveis e não-observáveis, levando a condições suficientes para a existência de solução estabilizante, enquanto que o corolário 4.8 apresenta condições suficientes mais simples.

Teorema 4.6: Suponha que $\mathbb{M} \neq \emptyset$. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) (A, B) é estabilizável na média quadrática e $(\mathcal{R}(X)^{1/2}, A + B\mathcal{F}(X))$ é detectável na média quadrática para algum $X \in \mathbb{M}$.

ii) Existe uma solução estabilizante na média quadrática para as EARA (3.2).

Prova: Inicialmente será mostrado que i) implica em ii).

Das hipóteses de que (A, B) é estabilizável na média quadrática e que $\mathbb{M} \neq \emptyset$ tem-se, do teorema 3.5, que existe uma solução máxima $X^+ = (X_1^+, \ldots, X_N^+) \in \hat{\mathbb{M}}$. Tomando $X \in \mathbb{M}$ tal que $(\mathcal{R}(X)^{1/2}, A + B\mathcal{F}(X))$ seja detectável na média quadrática, fazendo $F_i^+ = \mathcal{F}_i(X^+)$, $A_i^+ = A_i + B_i F_i^+$, $D_i = \mathcal{D}_i(X)$, $F_i = \mathcal{F}_i(X)$ para $i = 1, \ldots, N$, e lembrando que

$$X_i^+ - A_i^{+*}\mathcal{E}_i(\hat{X})A_i^+ = \mathcal{O}_i(F_i^+) \text{ para } i = 1, \ldots, N,$$

tem-se do lema 3.4, equação (3.3.b) que

$$(X_i^+ - X_i) - A_i^{+*}\mathcal{E}_i(X^+ - X)A_i^+ = \mathcal{R}_i(X) + (F_i^+ - F_i)^* D_i(F_i^+ - F_i) \tag{4.2}$$

para $i = 1, \ldots, N$. Como $\mathcal{R}_i(X) \geq 0$ e $D_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$, é possível encontrar $\delta > 0$ tal que para $i = 1, \ldots, N$,

$$\mathcal{R}_i(X) + (F_i^+ - F_i)^* D_i(F_i^+ - F_i) \geq \delta(\mathcal{R}_i(X) + (F_i^+ - F_i)^*(F_i^+ - F_i)). \tag{4.3}$$

Da definição 2.7 e da hipotése de detectabilidade na média quadrática, existe $H = (H_1, \ldots, H_N) \in \mathbb{H}^n$ tal que $r_\sigma(\mathcal{L}) < 1$, onde $\mathcal{L}(.) = (\mathcal{L}_i(.), \ldots, \mathcal{L}_N(.))$ como em (2.4.b), com $\Gamma_i = A_i + B_i F_i + H_i \mathcal{R}_i(X)^{1/2}$ para $i = 1, \ldots, N$. Defina $\Phi^+ = (\Phi^+{}_1, \ldots, \Phi^+{}_N) \in \mathbb{H}^{n, n+m}$, $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_N) \in \mathbb{H}^{n, n+m}$ e $\Xi = (\Xi_1, \ldots, \Xi_N) \in \mathbb{H}^{n+m, n}$ como

$$\Phi_i^+ := \begin{bmatrix} 0 \\ F_i^+ \end{bmatrix}$$

$$\Phi_i := \begin{bmatrix} \mathcal{R}_i(X)^{1/2} \\ F_i \end{bmatrix}$$

$$\Xi_i := \begin{bmatrix} H_i & B_i \end{bmatrix}$$

para $i = 1, \ldots, N$. É fácil verificar que

$$A_i + \Xi_i \Phi_i = A_i + B_i F_i + H_i \mathcal{R}_i(X)^{1/2} = \Gamma_i$$
$$A_i + \Xi_i \Phi_i^+ = A_i + B_i F_i^+ = A_i^+$$

para $i = 1, \ldots, N$. Com isso, de (4.2) e (4.3) tem-se que, para $i = 1, \ldots, N$

$$\delta(\Phi_i^+ - \Phi_i)^* (\Phi_i^+ - \Phi_i) = \delta(\mathcal{R}_i(X) + (F_i^+ - F_i)^* (F_i^+ - F_i)) \leq$$
$$\leq (X_i^+ - X_i) - A_i^{+*} \mathcal{E}_i(X^+ - X) A_i^+ = (X_i^+ - X_i) - (A_i + \Xi_i \Phi_i^+)^* \mathcal{E}_i(X^+ - X)(A_i + \Xi_i \Phi_i^+).$$

Fazendo $\mathcal{L}^+(.) = (\mathcal{L}_1^+(.), \ldots, \mathcal{L}_N^+(.))$ com $\mathcal{L}_i^+(.) = A_i^{+*} \mathcal{E}_i(.) A_i^+$ para $i = 1, \ldots, N$ e lembrando que $X^+ - X \geq 0$, tem-se do lema 2.13 na página 17 que $r_\sigma(\mathcal{L}^+) < 1$, o que prova a primeira parte do teorema.

Continuando com a prova, agora se mostrará que ii) implica em i).

Suponha que $X^+ = (X_1^+, \ldots, X_N^+) \in \hat{\mathbb{M}}$ é a solução estabilizante na média quadrática para as EARA (3.2). Nesse caso claramente (A, B) será estabilizável na média quadrática e $(\mathcal{R}(X^+)^{1/2}, A + B\mathcal{F}(X^+)) = (0, A + B\mathcal{F}(X))$ será detectável na média quadrática.

□

O teorema a seguir substitui a condição de detectabilidade do teorema anterior por outras condições baseadas nos modos observáveis e não-observáveis de $(\mathcal{R}_i(X)^{1/2}, A_i + B_i F_i)$ para $i = 1, \ldots, N$ e $X \in \mathbb{M}$.

Os resultados expressos no teorema e no corolário a seguir são análogos aos de [13],com a diferença de que em [13] assume-se $R_i > 0$, $Q_i \geq 0$ e $L_i = 0$ para $i = 1, \ldots, N$, enquanto que neste trabalho R_i e Q_i são supostas apenas hermitianas, as restrições nas matrizes acima substituídas pela hipótese mais fraca de que $\mathbb{M} \neq \emptyset$.

Na sequência, define-se $p_{ij}^T := \mathcal{P}(\theta(T) = j | \theta(0) = i)$ (leia-se p_{ij} de T) e $\min(\emptyset) := \infty$. No mais é usada a mesma notação do teorema anterior. Com relação à segunda definição, ela serve para ajustar a condição (ii) do teorema abaixo a todos os casos possíveis. Apesar de não usual, definir $\min(\emptyset)$ como infinito será conveniente.

Teorema 4.7: Suponha que $\mathbb{M} \neq \emptyset$ e (A, B) é estabilizável na média quadrática. Suponha que, além disso, para algum $X \in \mathbb{M}$ e para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$, alguma das condições abaixo seja satisfeita:

i) $(\mathcal{R}_i(X)^{1/2}, p_{ii}^{1/2}(A_i + B_i \mathcal{F}_i(X)))$ não tem modos não-observáveis *dentro* do disco complexo de raio unitário, ou

ii) $(\mathcal{R}_i(X)^{1/2}, p_{ii}^{1/2}(A_i + B_i \mathcal{F}_i(X)))$ não tem modos não-observáveis *sobre* o disco complexo unitário, 0 não é um modo não-observável de $(\mathcal{R}_i(X)^{1/2}, A_i + B_i \mathcal{F}_i(X))$, e

$$\zeta(i) := \min \{T;\ p_{ij}^T > 0 \text{ para algum } j \in \Upsilon\} < \infty,$$

onde $\Upsilon := \{\kappa \in \{1, \ldots, N\};\ \kappa \text{ satisfaz a condição (i)}\}$.

Então X^+, a solução máxima das EARA (3.2) em $\mathring{\mathbb{M}}$, é a solução estabilizante na média quadrática das EARA (3.2). Além disso, $X^+ - X > 0$.

Prova: Esta prova é similar à do teorema 2 de [13], com a diferença de que em [13] se assume que $R_i > 0$, $Q_i \geq 0$, $L_i = 0$ e $\zeta(i) = 1$ para $i = 1, \ldots, N$.
Inicialmente considere que a partir das hipóteses feitas, do teorema 3.5 e do lema 4.5, é imediato que existe uma solução máxima $X^+ \in \mathbb{M}$ e que $r_\sigma(p_{ii}^{1/2}) < 1$ para $i = 1, \ldots, N$. Note então que (veja o lema 4.5)

$$(X_i^+ - X_i) - p_{ii}A_i^{+*}(X_i^+ - X_i)A_i^+ = A_i^{+*}\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{N} p_{ij}(X_j^+ - X_j)\right)A_i^+ + Z_i^* Z_i,$$

onde $Z_i^* = \left[\mathcal{R}_i(X)^{1/2} \quad (F_i^+ - F_i)^* D_i^{1/2}\right]$. Isso implica em

$$(X^+ - X) = H + \mathcal{A}(X^+ - X) \geq H, \tag{4.4}$$

onde $\mathcal{A}(.) = (\mathcal{A}_i(.), \ldots, \mathcal{A}_N(.))$ é como definido em (4.1), com $\Gamma = A^+$, e $H = (H_1, \ldots, H_N)$ é definido como

$$H_i := \sum_{k=0}^{\infty} (p_{ii}^{1/2}A^{+*})^k (Z_i^* Z_i)(p_{ii}^{1/2}A^+)^k \geq 0 \text{ para } i = 1, \ldots, N. \tag{4.5}$$

Iterando a equação (4.4), tem-se que

$$(X^+ - X) = \mathcal{A}^{t-1}(X^+ - X) + \sum_{k=0}^{t} \mathcal{A}^k(H) \geq \sum_{k=0}^{t} \mathcal{A}^k(H) \geq 0, \tag{4.6}$$

o que mostra que $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k(H)$ existe.

Se for possível mostrar que para algum inteiro ζ,

$$\sum_{k=0}^{\zeta} \mathcal{A}^k(H) > 0, \tag{4.7}$$

então

$$0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k \left(\sum_{s=0}^{\zeta} \mathcal{A}^k(H) \right) = \sum_{k=s}^{\infty} \mathcal{A}^k(H) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k(H)$$

e aplicando o lema 4.4 se concluirá que $r_\sigma(\mathcal{L}^+) < 1$. Falta, é claro, provar que (4.7) vale para algum inteiro ζ.

Primeiramente se provará que para qualquer $i \in \Upsilon$, $H_i > 0$. Tendo em vista a equação (4.5), basta mostrar que $(Z_i,\ p_{ii}^{1/2} A^+)$ é observável. Por contradição, suponha que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um modo não-observável de $(Z_i,\ p_{ii}^{1/2} A^+)$, isto é, para algum $x \neq 0$ em $\mathbb{C}^n$,

$$p_{ii}^{1/2} A^+ x = \lambda x$$

$$Z_i x = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_i(X)^{1/2} x \\ D_i(F_i^+ - F_i)x \end{bmatrix} = 0,$$

o que implica em $F_i x = F_i^+ x$ e $\mathcal{R}_i(X)^{1/2} x = 0$. Portanto

$$\mathcal{R}_i(X)^{1/2} x = 0$$

$$p_{ii}^{1/2} A^+ x = p_{ii}^{1/2}(A_i + B_i F_i^+)x = p_{ii}^{1/2}(A_i + B_i F_i)x = \lambda x$$

isto é, λ é um modo não-observável de $(\mathcal{R}_i(X)^{1/2},\ p_{ii}^{1/2}(A_i + B_i F_i))$. Como $r_\sigma(\ p_{ii}^{1/2}(A_i + B_i F_i)) < 1$, deve-se ter que $\|\lambda\| < 1$, o que é uma contradição com a hipótese (i).

Suponha agora que i satisfaz a hipótese (ii). Seja $T = \zeta(i)$. Como $p_{ij}^T > 0$ para algum $j \in \Upsilon$ e T finito, e como T é o menor inteiro com essa propriedade, pode-se encontrar uma sequência de elementos distintos $\{i_0, i_1, \ldots, i_{T-1}, i_T\}$, $i_0 = i$, $i_T = j$, tal que $p_{ii_1}\, p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{T-1} j} > 0$ e cada i_k, $k = 0, \ldots, T-1$ satisfaça a condição (b). (se isso não fosse possível, T não seria mínimo). Mostra-se então por indução finita que

$$H_j > 0$$

$$H_{i_{T-1}} + \mathcal{A}_{i_{T-1}}(H) > 0$$

$$\vdots$$

$$H_i + \mathcal{A}_i(H) + \cdots + \mathcal{A}_i^T(H) > 0.$$

Como visto nesta prova, $H_j > 0$. Suponha que $H_{i_k} + \mathcal{A}_{i_k}(H) + \cdots + \mathcal{A}_{i_k}^{T-k}(H) > 0$. É necessário então mostrar que

$$H_{i_{k-1}} + \mathcal{A}_{i_{k-1}}(H) + \cdots + \mathcal{A}_{i_{k-1}}^{T-k+1}(H) > 0.$$

Suponha, por contradição, que para algum $x \neq 0$ em $\mathbb{C}^n$, $(H_{i_{k-1}} + \mathcal{A}_{i_{k-1}}(H) + \cdots + \mathcal{A}_{i_{k-1}}^{T-k+1}(H))x = 0$. Então deve-se ter que $H_{i_{k-1}}x = 0, \ldots, \mathcal{A}_{i_{k-1}}^{T-k+1}(H)x = 0$, e portanto

$$
\begin{aligned}
0 &= x^*(\mathcal{A}_{i_{k-1}}(H) + \cdots + \mathcal{A}_{i_{k-1}}^{T-k+1}(H))x = \\
&= x^*\mathcal{A}_{i_{k-1}}(H + \mathcal{A}(H) + \cdots + \mathcal{A}^{T-k}(H))x = \\
&= x^*\left(\sum_{s=0}^{\infty}(p_{i_{k-1}i_{k-1}}^{1/2}A_{i_{k-1}}^{+*})^s A_{i_{k-1}}^{+*}\left(\sum_{l=1,\, l\neq i_{k-1}}^{N} p_{i_{k-1}l}(H_l + \cdots\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \mathcal{A}_l^{T-k}(H))\right)(p_{i_{k-1}i_{k-1}}^{1/2}A_{i_{k-1}}^{+})^s A_{i_{k-1}}^{+}\right)x \geq \\
&\geq x^*\left(A_{i_{k-1}}^{+*}\left(\sum_{l=1,\, l\neq i_{k-1}}^{N} p_{i_{k-1}l}(H_l + \cdots + \mathcal{A}_l^{T-k}(H))\right)A_{i_{k-1}}^{+}\right)x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Como $p_{i_{k-1}i_k} > 0$, $i_{k-1} \neq i_k$, $H_{i_k} + \mathcal{A}_{i_k}(H) + \cdots + \mathcal{A}_{i_k}^{T-k}(H) > 0$, conclui-se que $A_{i_{k-1}}^{+}x = 0$. Note então que o fato de que $H_{i_{k-1}}x = 0$ implica em (veja a equação (4.5)) que $Z_{i_{k-1}}x = 0$, e portanto $\mathcal{R}_{i_{k-1}}(X)x = 0$ e $F_{i_{k-1}}^{+}x = F_{i_{k-1}}x$. Daí

$$
\mathcal{R}_{i_{k-1}}(X)^{1/2}x = 0
$$

$$
A_{i_{k-1}}^{+}x = (A_{i_{k-1}} + B_{i_{k-1}}F_{i_{k-1}}^{+})x = (A_{i_{k-1}} + B_{i_{k-1}}F_{i_{k-1}})x
$$

o que implica que 0 é um modo não-observável de $(\mathcal{R}_{i_{k-1}}(X)^{1/2}, A_{i_{k-1}} + B_{i_{k-1}}F_{i_{k-1}})$, contradizendo a hipótese (ii) do teorema. De onde se conclui que (4.7) é satisfeita para $\zeta = \max\{\zeta(i); i \notin \Upsilon\}$. Finalmente, note que de (4.6) e (4.7),

$$
X^{+} - X \geq \sum_{k=0}^{\zeta}\mathcal{A}^k(H) > 0.
$$

□

Corolário 4.8: Suponha que $\mathbb{M} \neq \emptyset$ e que (A, B) é estabilizável na média quadrática. Suponha também que para algum $X \in \mathbb{M}$ e que para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$, uma das condições

abaixo seja satisfeita:

i) $(\mathcal{R}_i(X)^{1/2}\ ,\ p_{ii}^{1/2}(A_i + B_i\mathcal{F}_i(X)))$ é observável, ou

ii) $(\mathcal{R}_i(X)^{1/2}\ ,\ p_{ii}^{1/2}(A_i + B_i\mathcal{F}_i(X)))$ é detectável, 0 não é um modo não-observável de $(\mathcal{R}_i(X)^{1/2}\ , A_i + B_i\mathcal{F}_i(X))$ e $\zeta(i) < \infty$, onde $\zeta(i)$ é como no teorema 4.7.

Então X^+, a solução máxima das EARA (3.2) em $\hat{\mathbb{M}}$, é a única solução tal que $X^+ - X \geq 0$. Além disso, $X^+ - X > 0$ e X^+ é a solução estabilizante na média quadrática das EARA (3.2).

Prova: A prova deste corolário é similar à do teorema 3 de [13].
Como visto no teorema 4.7, X^+ é a única solução estabilizante na média quadrática das EARA (3.2) e também $X^+ - X > 0$. Suponha que $\overline{X}$ seja outra solução para as EARA e que $\overline{X} - X \geq 0$ (e portanto $\overline{X} \in \hat{\mathbb{M}}$). Se for possível mostrar que $r_\sigma(A_i + B_i\mathcal{F}_i(\overline{X})) < 1$ para $i = 1, \ldots, N$, então, repetindo os argumentos da prova do teorema 4.7, se terá que $\overline{X}$ é uma solução estabilizante na média quadrática, e portanto $\overline{X} = X^+$.
Suponha, por contradição, que para algum i e algum $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $\|\lambda\| \geq 1$ e algum $x \neq 0$ em $\mathbb{C}^n$,

$$p_{ii}^{1/2}(A_i + B_i\mathcal{F}_i(\overline{X}))x = \lambda x\,.$$

Fazendo $\overline{F} = \mathcal{F}(\overline{X})$ e tomando a equação (3.3.b) do lema 3.4, tem-se que

$$\begin{aligned}
0 &= x^*((\overline{X}_i - X_i) - p_{ii}(A_i + B_i\overline{F}_i)^*(\overline{X}_i - X_i)(A_i + B_i\overline{F}_i))x = \\
&= (1 - \|\lambda\|)x^*(\overline{X}_i - X_i)x = \\
&= x^*\Bigg((A_i + B_i\overline{F}_i)^*\Bigg(\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N} p_{ij}(\overline{X}_j - X_j)\Bigg)(A_i + B_i\overline{F}_i) \\
&\quad + \mathcal{R}_i(X) + (\overline{F}_i - F_i)^* D_i(\overline{F}_i - F_i)\Bigg)x,
\end{aligned}$$

e como $\|\lambda\| \geq 1$ e $\overline{X} - X \geq 0$, $D > 0$, $\mathcal{R}(X) \geq 0$, pode-se concluir que

$$x^*(A_i + B_i\bar{F}_i)^*\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{N} p_{ij}(\bar{X}_j - X_j)\right)(A_i + B_i\bar{F}_i)x = 0$$

$$x^*\mathcal{R}_i(X)x = 0$$

$$x^*(\bar{F}_i - F_i)^* D_i(\bar{F}_i - F_i)x = 0$$

e portanto

$$p_{ii}^{1/2}(A_i + B_i\bar{F}_i)x = p_{ii}^{1/2}(A_i + B_iF_i)x = \lambda x$$
$$\mathcal{R}_i(X)^{1/2}x = 0$$

o que mostra que λ é um modo não-observável de $(\mathcal{R}_i(X)^{1/2},\ p_{ii}^{1/2}(A_i + B_iF_i))$, contradizendo (i) ou (ii).

□

4.3 Soluções estabilizantes e sua relação com o problema de controle

Nesta seção será recapitulada a caracterização da norma H_2 para sistemas markovianos em termos das soluções dos gramianos acoplados de observabilidade e controlabilidade com algumas diferenças em relação ao feito no capítulo 2. Este resultado será útil na sequência, tornando possível associar à solução estabilizante das EARA (3.2), a solução do problema de controle H_2. Além disso se mostrará que essa solução pode ser obtida resolvendo-se um problema de programação convexa sujeito a DML´s.

Note que nesta seção se assumirá que $\begin{bmatrix} Q_i & L_i \\ L_i^* & R_i \end{bmatrix} \geq 0$.

4.3.1 Os gramianos e a norma H_2.

Considere o seguinte sistema discreto sujeito a saltos markovianos

$$\Sigma = \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) + D_{\theta(k)}\omega(k) \\ z(k) = M_{\theta(k)}x(k) + J_{\theta(k)}u(k) \\ x(0) = 0 \qquad \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

onde $M = (M_1, \ldots, M_N) \in \mathbb{H}^{n,s}$, $J = (J_1, \ldots, J_N) \in \mathbb{H}^{m,s}$ e $D = (D_1, \ldots, D_N) \in \mathbb{H}^{r,n}$ com $J_i^*J_i > 0$ e $D_i^*D_i > 0$ para $i = 1, \ldots, N$.

Seja o seguinte conjunto:

$$\mathbb{F} \coloneqq \{F = (F_1, \ldots, F_N) \in \mathbb{H}^{m,n};\ F \text{ estabiliza } (A, B) \text{ na média quadrática } \}.$$

O sistema acima será denotado por Σ_F quando $u(k) = F_{\theta(k)}x(k)$ para $F \in \mathbb{F}$.

Sejam então, para $F \in \mathbb{F}$, as soluções únicas dos gramianos de observabilidade $\mathcal{S}(F) = (\mathcal{S}_1(F), \ldots, \mathcal{S}_N(F)) \in \mathbb{H}^{n+}$ e controlabilidade $K(F) = (K_1(F), \ldots, K_N(F)) \in \mathbb{H}^{n+}$ tais que (veja a proposição 2.6 e a definição 3.3 na página 25),

$$\mathcal{S}_i(F) = (A_i + B_iF_i)^* \mathcal{E}_i(\mathcal{S}(F))(A_i + B_iF_i) + \mathcal{O}_i(F) \tag{4.8}$$

para $i = 1, \ldots, N$ e

$$K_j(F) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij}(A_i + B_iF_i)K_i(F)(A_i + B_iF_i)^* + D_jD_j^* \tag{4.9}$$

para $j = 1, \ldots, N$.

Como $\mathcal{O}_i(F) \geq 0$ e $D_jD_j^* > 0$ para $i, j = 1, \ldots, N$, $\mathcal{S}_i(F) \geq 0$ para $i = 1, \ldots, N$ e $K(F) > 0$ (veja a proposição 2.6).

Para o que se segue, define-se $Q_i = C_i^*C_i$, $L_i = C_i^*D_i$, $R_i = D_i^*D_i$ para $i = 1, \ldots, N$. Isso será utilizado a partir do próximo resultado, uma adaptação do resultado original de [19] apresentado no capítulo 2 (proposição 2.15), que mostra uma caracterização da norma H_2 para $F \in \mathbb{F}$ em termos das soluções dos gramianos de observabilidade e controlabilidade. Note também que com isso tem-se que $\begin{bmatrix} Q_i & L_i \\ L_i^* & R_i \end{bmatrix} \geq 0$.

Proposição 4.9:

$$\|\Sigma_F\|_2^2 = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{tr}(D_j^*\mathcal{S}_j(F)D_j) = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} Q_i & L_i \\ L_i^* & R_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_i(F) & K_i(F)F_i^* \\ F_iK_i(F) & F_iK_i(F)F_i^* \end{bmatrix} \right).$$

4.3.2 Resultados principais

Nesta seção as matrizes serão consideradas reais (porém sem perda de generalidade, conforme comentado no capítulo 2).

Sejam os seguintes conjuntos:

$$\Psi := \{ W = (W_1, \ldots, W_N) \in \mathbb{G}^{m+n}; \text{ para } j = 1, \ldots, N,\ W_j = \begin{bmatrix} W_{j1} & W_{j2} \\ W_{j2}^* & W_{j3} \end{bmatrix} \geq 0,\ W_{j1} > 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij}(A_i W_{i1} A_i^* + B_i W_{i2}^* A_i^* + A_i W_{i2} B_i^* + B_i W_{i3} B_i^*) - W_{j1} + D_j D_j^* \leq 0 \}$$

e

$$\hat{\Psi} := \{ W = (W_1, \ldots, W_N) \subseteq \Psi; \text{ para } j = 1, \ldots, N,\ W_{j3} = W_{j2}^* W_{j1}^{-1} W_{j2} \text{ e}$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij}(A_i W_{i1} A_i^* + B_i W_{i2}^* A_i^* + A_i W_{i2} B_i^* + B_i W_{i3} B_i^*) - W_{j1} + D_j D_j^* = 0 \}$$

e seja também a função de custo

$$\lambda(W) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{tr} \left(\begin{bmatrix} Q_i & L_i \\ L_i^* & R_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_{i1} & W_{i2} \\ W_{i2}^* & W_{i3} \end{bmatrix} \right).$$

Note que Ψ é um conjunto convexo, ao contrário de $\hat{\Psi}$.

Com isso se pode passar aos resultados principais desta seção, expressos na forma de uma proposição e um teorema.

Proposição 4.10: Existem mapeamentos $\mathcal{K}: \mathbb{F} \to \hat{\Psi}$ e $\mathcal{J}: \Psi \to \mathbb{F}$ tais que

i) $\mathcal{J}\mathcal{K} = \mathcal{I}$,

ii) $\mathcal{K}\mathcal{J} = \mathcal{I}$ em $\hat{\Psi}$ e

iii) $\mathcal{K}\mathcal{J}(W) \leq W$ para todo $W \in \Psi$.

Prova: Observe que esta prova faz uso de argumentos semelhantes aos utilizados na prova da proposição 2.8 da página 13.

Para qualquer $F = (F_1, \ldots, F_N) \in \mathbb{F}$, seja $K(F) = (K_1(F), \ldots, K_N(F)) > 0$ como em (4.9). Seja também

$$\mathcal{K}(F) = \left(\begin{bmatrix} K_1(F) & K_1(F)F_1^* \\ F_1 K_1(F) & F_1 K_1(F) F_1^* \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} K_N(F) & K_N(F)F_N^* \\ F_N K_N(F) & F_N K_N(F) F_N^* \end{bmatrix} \right).$$

Do comentário 2.1 da página 10 e da equação (4.9), é imediato que $\mathcal{K}(F) \in \hat{\Psi}$.

Para qualquer $W = (W_1, \ldots, W_N) \subseteq \Psi$, seja

$$\mathcal{J}(W) = (W_{12}^* W_{11}^{-1}, \ldots, W_{N2}^* W_{N1}^{-1}) .$$

Como $W_{i3} \geq W_{i2}^* W_{i1}^{-1} W_{i2}$ para $i = 1, \ldots, N$ (veja o comentário 2.1), então

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij}(A_i + B_i W_{i2}^* W_{i1}^{-1}) W_{i1} (A_i + B_i W_{i2}^* W_{i1}^{-1})^* - W_{j1} + D_j D_j^* \leq$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij}(A_i W_{i1} A_i^* + B_i W_{i2}^* A_i^* + A_i W_{i2} B_i^* + B_i W_{i3} B_i^*) - W_{j1} + D_j D_j^* \leq 0 , \qquad (4.10)$$

e portanto da proposição 2.6, $\mathcal{J}(W) \in \mathbb{F}$. É imediato verificar que $\mathcal{J}(\mathcal{K}(F)) = F$, mostrando (i). Da unicidade da solução $K(F)$ do gramiano de (4.9), como enunciada na proposição 2.6, tem-se que para qualquer $W \in \hat{\Psi}$, $K(\mathcal{J}(W)) = (W_{11}, \ldots, W_{N1})$, de modo que $\mathcal{K}(\mathcal{J}(W)) = W$, mostrando (ii).

Segue-se então a prova de (iii). Tem-se que

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij}(A_i + B_i W_{i2}^* W_{i1}^{-1}) K_i(\mathcal{J}(W)) (A_i + B_i W_{i2}^* W_{i1}^{-1})^* - K_j(\mathcal{J}(W)) + D_j D_j^* = 0$$

e portanto de (4.10) e da proposição 2.6, $K_j(\mathcal{J}(W)) \leq W_{j1}$, $j = 1, \ldots, N$

Resta então provar que para $i = 1, \ldots, N$,

$$W_i - (\mathcal{K}\mathcal{J})_i(W) = \begin{bmatrix} W_{i1} - K_i(\mathcal{J}(W)) & W_{i2} - K_i(\mathcal{J}(W)) W_{i1}^{-1} W_{i2} \\ W_{i2}^* - W_{i2}^* W_{i1}^{-1} K_i(\mathcal{J}(W)) & W_{i3} - W_{i2}^* W_{i1}^{-1} (K_i(\mathcal{J}(W)) W_{i1}^{-1} W_{i2}) \end{bmatrix} \geq 0 .$$

De fato, $K_i(\mathcal{J}(W)) \leq W_{i1}$ e, por complemento de Schur (comentário 2.1),

$$(W_{i1} - K_i(\mathcal{J}(W)))(W_{i1} - K_i(\mathcal{J}(W)))^{\dagger} (W_{i1} - K_i(\mathcal{J}(W))) W_{i1}^{-1} W_{i2} =$$
$$W_{i2} - K_i(\mathcal{J}(W)) W_{i1}^{-1} W_{i2}$$

e

$$W_{i3} - W_{i2}^* W_{i1}^{-1} (K_i(\mathcal{J}(W)) W_{i1}^{-1} W_{i2}) -$$
$$W_{i2}^* W_{i1}^{-1} (W_{i1} - K_i(\mathcal{J}(W)))((W_{i1} - K_i(\mathcal{J}(W)))^{\dagger} (W_{i1} - K_i(\mathcal{J}(W))) W_{i1}^{-1} W_{i2}) =$$
$$W_{i3} - W_{i2}^* W_{i1}^{-1} W_{i2} \geq 0 .$$

Daí, novamente por complemento de Schur, obtém-se o resultado desejado.

□

É apresentado a seguir o resultado principal desta seção. O teorema abaixo estabelece a relação entre a existência de solução estabilizante para as EARA (3.2), a existência de solução para o problema de controle H_2 e a existência de solução para um dado problema de programação convexa, estabelecendo também a relação entre essas soluções.

Teorema 4.11: As seguintes três afirmações são equivalentes:

i) Existe uma solução $X = (X_1, \ldots, X_N)$ para as EARA dadas por (3.2).
ii) Existe $\tilde{F} = (\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_N) \in \mathbb{F}$ tal que $\left\|\Sigma_{\tilde{F}}\right\|_2 = \min \{ \|\Sigma_F\|_2 ; F \in \mathbb{F} \}$.
iii) Existe $W = (W_1, \ldots, W_N) \in \Psi$ tal que $\lambda(W) = \min \{\lambda(V); V \in \Psi\}$.
Além disso,
iv) Se X satisfaz (i), então $\mathcal{F}(X)$ satisfaz (ii) e $\mathcal{K}(\mathcal{F}(X))$ satisfaz (iii), onde $\mathcal{F}(X)$ é como na definição 3.3 da página 28.
v) Se $\tilde{F}$ satisfaz (ii), então $\mathcal{S}(\tilde{F})$ satisfaz (i) e $\mathcal{K}(F)$ satisfaz (iii).
vi) Se W satisfaz (iii), então $\mathcal{S}(\mathcal{J}(W))$ satisfaz (i) e $\mathcal{J}(W)$ satisfaz (ii).

Prova: A segunda parte da prova (afirmações (iv),(v) e (vi)) segue imediatamente da primeira parte (equivalência entre (i), (ii) e (iii)).
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : Das proposições 4.9 e 4.10, é imediato que

$$\min \{ \|\Sigma_F\|_2 ; F \in \mathbb{F} \} = \min \left\{ \lambda(V); V \in \hat{\Psi} \right\},$$

e como $\hat{\Psi} \subseteq \Psi$, é claro que

$$\min \left\{ \lambda(V); V \in \hat{\Psi} \right\} \geq \min \{ \lambda(V); V \in \Psi \}.$$

Por outro lado, para qualquer $V \in \Psi$, tem-se da proposição 4.10 que $\mathcal{K}\mathcal{J}(V) \leq V$, com $\mathcal{K}\mathcal{J}(V) \in \hat{\Psi}$. Portanto, como $\lambda(\mathcal{K}\mathcal{J}(V)) \leq \lambda(V)$, tem-se que

$$\min \left\{ \lambda(V); V \in \hat{\Psi} \right\} \leq \min \{ \lambda(V); V \in \Psi \},$$

o que mostra que

$$\min \{ \|\Sigma_F\|_2 ; F \in \mathbb{F} \} = \min \{ \lambda(V); V \in \Psi \},$$

completando a prova de equivalência entre (ii) e (iii).

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) : Suponha que X é uma solução estabilizante na média quadrática para as EARA (3.2). É fácil mostrar que X satisfaz

$$X_i - (A_i + B_i\mathcal{F}_i(X))^* \mathcal{E}_i(X)(A_i + B_i\mathcal{F}_i(X)) = \mathcal{O}(\mathcal{F}(X))$$

(veja a definição 3.3) e portanto da unicidade da solução (conforme a proposição 2.6), $\mathcal{S}(\mathcal{F}(X)) = X$. Para qualquer $F \in \mathbb{F}$ e $\mathcal{S}(F)$ como em (4.8), tem-se, de acordo com o lema 3.4, que

$$(\mathcal{S}_i(F) - X_i) - (A_i + B_iF_i)^* \mathcal{E}_i(\mathcal{S}(F) - X)(A_i + B_iF_i) =$$

$$(F_i - \mathcal{F}_i(X))^* \mathcal{D}_i(X)(F_i - \mathcal{F}_i(X)), \tag{4.11}$$

e da proposição 2.6, $\mathcal{S}(F) \geq X$. Da proposição 4.9 tem-se que

$$\|\Sigma_F\|_2^2 = \sum_{j=1}^{N} \text{tr}\,(D_j^* \mathcal{S}_j(F) D_j) \geq \sum_{j=1}^{N} \text{tr}\,(D_j^* X_j D_j) = \|\Sigma_{\mathcal{F}(X)}\|_2^2,$$

mostrando que $\mathcal{F}(X)$ satisfaz (ii).

Por outro lado, suponha que existe $\tilde{F} = (\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_N) \in \mathbb{F}$ satisfazendo (ii). Então claramente (A, B) é estabilizável na média quadrática e existe uma solução máxima X para as EARA (3.2). Além disso, de acordo com o teorema 3.5, é possível encontrar sequências $X^l \in \mathbb{G}^{n+}$ e $F^l = \mathcal{F}(X^{l-1}) \in \mathbb{F}$ para $l = 1, 2, \ldots$ tais que as equações (3.4.a)-(3.4.d) sejam satisfeitas e X^l tenda para X quando l tende a infinito.

Começando com $F^0 = \tilde{F}$, de modo que $X^0 = \mathcal{S}(\tilde{F}) \geq X^l \geq X$ para todo l, tem-se da otimalidade de $\tilde{F}$ que

$$\|\Sigma_{F^l}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{N} \text{tr}\,(D_j^* X_j^l D_j) \geq \sum_{j=1}^{N} \text{tr}\,(D_j^* \mathcal{S}_j(\tilde{F}) D_j) = \|\Sigma_{\tilde{F}}\|_2^2.$$

Da proposição 4.9 e das equações (3.4.a)-(3.4.d), obrigatoriamente

$$\sum_{j=1}^{N} \text{tr}\,(D_j^* (\mathcal{S}_j(\tilde{F}) - X_j^l) D_j) = 0,$$

portanto, como $D_j D_j^* > 0$, pode-se concluir que $\mathcal{S}(\tilde{F}) = X^l = X$. Da equação (4.11) e do fato que $\mathcal{D}_i(X) > 0$, tem-se que $\tilde{F} = \mathcal{F}(X) \in \mathbb{F}$, provando que X é a solução estabilizante no sentido da média quadrática.

□

4.4 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados alguns resultados envolvendo soluções estabilizantes para as equações algébricas de Riccati acopladas, apresentadas no capítulo 3.

Na seção 4.2 foram apresentadas condições necessárias e suficientes para a existência de soluções estabilizantes para as EARA em diversas formulações diferentes. Apesar das condições obtidas serem de difícil verificação por não se prestarem a testes computacionais, elas acrescentam informações úteis para o conhecimento do problema.

Na seção 4.3 mostrou-se a equivalência entre a solução estabilizante das EARA e a solução do problema de controle H_2 para sistemas markovianos, estabelecendo ainda uma relação com um terceiro problema, de programação convexa. Nesta seção particularmente, considerou-se as matrizes de custo como sendo positivas semidefinidas e R_i positiva definida.