capítulo 3

Equações algébricas de Riccati acopladas e o controle ótimo linear-quadrático

3.1 Sobre este capítulo

Este capítulo trata do problema de controle linear-quadrático para sistemas sujeitos a saltos markovianos e é composto de 5 seções. Esta primeira seção apenas descreve de maneira sucinta o conteúdo das seções seguintes. A próxima seção (seção 3.2) apresenta o problema de controle ótimo linear-quadrático dentro de um contexto markoviano, enquanto que a seção 3.3 compara este trabalho com outros que tratam de problemas semelhantes. A seção 3.4 apresenta resultados sobre a existência de soluções máximas para as equações algébricas de Riccati acopladas (EARA), bem como de procedimentos computacionais para obtê-las. Tais soluções, como se verá no decorrer do capítulo são de grande interesse sob o ponto de vista de resolução do problema de controle. O capítulo é concluído com alguns comentários na seção 3.5

3.2 Formulação do problema de controle ótimo

Como mencionado, nesse capítulo se tratará do problema de controle ótimo quadrático dentro de

um contexto markoviano. Suponha que se deseje minimizar o seguinte funcional

$$J(x(0), \theta(0), u) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} E\left\{ \begin{bmatrix} x(k)^* & u(k)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\theta(k)} & L_{\theta(k)} \\ L^*_{\theta(k)} & R_{\theta(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \right\}$$

onde

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) \\ x(0) &= x_0 \qquad \theta(0) = \theta_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

e $\theta(k)$, como no capítulo 2, denota uma cadeia de Markov assumindo valores dentro do conjunto $\{1, \ldots, N\}$ com a matriz de probabilidades de transição dada por . Na maioria dos casos, as matrizes são positivas semi-definidas para , porém o caso indefinido também é de interesse (veja por exemplo [23]).

Considere , , , e . Com relação a e , apenas assume-se que elas sejam hermitianas. Pode-se mostrar que a lei de controle que minimiza o funcional acima para o sistema (3.1) é obtida a partir das Equações Algébricas de Riccati Acopladas (EARA) abaixo para ,

. (3.2)

será denominada uma solução hermitiana das EARA se for invertível e satisfizer as equações (3.2).

Para , a lei de controle que minimiza o funcional é dada por

.

3.3 Este trabalho e o atual estado da arte

O problema do controle ótimo linear quadrático para sistemas sujeitos a saltos markovianos com , , e as EARA associadas foi estudado em [11], [12], [13], [15], [34], [35], [42]. Condições para a existência de solução máxima e solução estabilizante (no sentido da média

quadrática) são apresentados em [12] e [15] em termos dos conceitos de estabilizabilidade na média quadrática e detectabilidade na média quadrática. A detectabilidade na média quadrática pode ser substituída por algumas condições nos modos não observáveis ([13], [42]) ou observabilidade estocástica [34]. Resultados em tempo contínuo relacionados a esse mesmo problema podem ser encontrados em [21], [26] e [59], onde são apresentadas condições para a existência de uma solução máxima e estabilizante para uma equação de Riccati perturbada linearmente.

Na literatura internacional corrente, os trabalhos mais próximos a este, do ponto de vista da obtenção de algoritmos para resolução das EARA e do problema de controle ótimo linear-quadrático são [48] e [1]. Em [48], como neste trabalho, os autores fazem uso de programação convexa aplicada a DML´s (desigualdades matriciais lineares), porém as restrições sobre as matrizes de custo do funcional quadrático são mais fortes que as obtidas aqui. Por outro lado, [1] obtém a solução algébrica de maneira recursiva, o que do ponto de vista da convergência do algoritmo é uma desvantagem patente. Além disso são necessárias restrições mais fortes, tanto no que concerne às matrizes de custo do funcional como no que concerne (curiosamente) à matriz de transição de probabilidades: o método não admite que a matriz de transição de probabilidades tenha elementos nulos na diagonal principal.

No decorrer do texto, as diferenças entre este trabalho e os dois mencionados acima serão novamente discutidas, num contexto mais específico. De modo geral pode-se afirmar que neste capítulo todos os resultados anteriores sobre as EARA quadráticas são unificados e generalizados, e os métodos, algoritmos e resultados apresentados aqui substituem com vantagens os de outros trabalhos.

Neste capítulo foi adotado o enfoque utilizado em [49] para se obter condições para a existência de soluções máximas e estabilizantes para as EARA quadráticas. No decorrer do texto se mostrará que sob as hipóteses de estabilizabilidade na média quadrática e de que um certo conjunto convexo não seja vazio, existe uma solução máxima para as EARA. Esta solução pode ser caracterizada como a solução de um problema de programação convexa, um resultado que permite que os procedimentos numéricos específicos de programação convexa (algoritmos de pontos interiores, etc.) sejam utilizados para se obter a solução do problema original. Condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução estabilizante podem ser também obtidas, utilizando-se o conceito de detectabilidade na média quadrática. Esta condição pode ser substituída pelos testes usuais de observabilidade e detectabilidade, produzindo condições suficientes para a existência de uma solução estabilizante das EARA.

3.4 Soluções máximas para as EARA

3.4.1 Preliminares sobre soluções máximas

Inicialmente será introduzida alguma notação e algumas definições serão feitas, para então se passar aos resultados principais dessa seção, que tratam da existência de uma solução máxima para as EARA e de como obtê-la. Entenda-se aqui solução máxima em um dado conjunto como sendo a maior de todas as soluções dentro desse conjunto.

Seja o seguinte conjunto:

$$\mathbb{L} := \{X = (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{H}^{n^*};\ (B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i)^{-1} \text{ existe para } i = 1, \ldots, N\}\,.$$

Define- se então o operador não-linear $\mathcal{R}(.) = (\mathcal{R}_1(.), \ldots, \mathcal{R}_N(.)) : \mathbb{L} \to \mathbb{H}^n$.

Definição 3.1: Para $X = (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{L}$, define-se $\mathcal{R}(X) = (\mathcal{R}_1(X), \ldots, \mathcal{R}_N(X))$ com

$$\mathcal{R}_i(X) := -X_i + A_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i + Q_i - (A_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + L_i)(B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i)^{-1}(B_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i + L_i^*)$$

(leia-se *Riccati de* X).

Note que se para algum $X \in \mathbb{L}$, $\mathcal{R}(X) = 0$, então X é uma solução hermitiana para as EARA.

A partir da definição acima, considera-se a seguinte notação

$$\mathbb{N} := \{X = (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{H}^n;\ X \in \mathbb{L} \text{ e } (B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i) > 0 \text{ para } i = 1, \ldots, N\}\,,$$

$$\mathbb{M} := \{X = (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{H}^n;\ X \in \mathbb{N} \text{ e } \mathcal{R}(X) \geq 0\}\,,$$

$$\hat{\mathbb{M}} := \{X = (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{H}^n;\ X \in \mathbb{N} \text{ e } \mathcal{R}(X) = 0\}\,.$$

Na prova do teorema 3.6 abaixo, se mostrará que $\mathbb{N}$ é um conjunto convexo.

Comentário 3.2: Para a equação de Riccati a tempo discreto determinística (isto é, com $N = 1$) com $L = 0$, $Q \geq 0$ e $R = I$, mostrou-se em [58] que se $\mathcal{R}(X) = 0$ (e nesse caso $(B^* X B + I)^{-1}$ existe), então $B^* X B + I > 0$. Esse resultado não pode ser estendido para o caso markoviano, como se pode observar do seguinte contra-exemplo.

Considere um sistema com dois modos de operação ($N = 2$), relacionados por uma matriz de probabilidades de transição dada por $P = \begin{bmatrix} 1/8 & 7/8 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. O modelo do sistema é dado por $A_1 = 1$, $A_2 = 1/2$, $B_1 = B_2 = 1$ e o custo do funcional é dado por $Q_1 = Q_2 = 0$,

$R_1 = R_2 = 1$, $L_1 = L_2 = 0$. Resolvendo-se as EARA, o que pode ser feito analiticamente sem grandes dificuldades, obtém-se as quatro soluções abaixo.

$$X_1^1 = X_2^1 = 0$$
$$X_1^2 = 1{,}5562 \qquad X_2^2 = -3{,}42$$
$$X_1^3 = -0{,}8308 \qquad X_2^3 = -0{,}3999$$
$$X_1^4 = -9{,}4754 \qquad X_2^4 = 0{,}3199$$

Note que para a segunda e quarta soluções:

$$1 + \mathcal{E}_1(X^2) = -1{,}7979 \qquad 1 + \mathcal{E}_2(X^2) = 0{,}0681$$
$$1 + \mathcal{E}_1(X^4) = 0{,}0955 \qquad 1 + \mathcal{E}_2(X^4) = -3{,}5778$$

Portanto, mesmo com $L_i = 0$, $Q_i \geq 0$ e $R_i = I$, não se pode afirmar que X ser uma solução hermitiana das EARA implica em $B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + I > 0$.

Segue-se então a definição de alguns operadores, que se farão úteis na sequência do texto.

Definição 3.3: Sejam os operadores $\mathcal{O}(.):\mathbb{H}^{m,n} \to \mathbb{H}^n$, $\mathcal{D}(.):\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^m$, $\mathcal{F}(.):\mathbb{L} \to \mathbb{H}^{n,m}$. Para $F = (F_1, \ldots, F_N) \in \mathbb{H}^{m,n}$ e $X = (X_1, \ldots, X_N)$ em um domínio apropriado ($\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{L}$, conforme o caso), $\mathcal{O}(F) = (\mathcal{O}_1(F), \ldots, \mathcal{O}_N(F))$, $\mathcal{D}(X) = (\mathcal{D}_1(X), \ldots, \mathcal{D}_N(X))$ e $\mathcal{F}(X) = (\mathcal{F}_1(X), \ldots, \mathcal{F}_N(X))$ são definidos, para $i = 1, \ldots, N$, como

$$\mathcal{O}_i(F) := \begin{bmatrix} I & F_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i & L_i \\ L_i^* & R_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F_i \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D}_i(X) := B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i$$

$$\mathcal{F}_i(X) := -(B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i)^{-1} (B_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i + L_i^*).$$

O seguinte lema técnico será utilizado na demonstração do teorema 3.5, que apresenta os resultados principais relacionados à existência de soluções máximas para as EARA. A sua prova é direta, porém extensa, e por isso será omitida (veja [44] e [49] para resultados similares fora do contexto markoviano).

Lema 3.4: Suponha que $X \in \mathbb{M}$ e que para algum $\hat{F} = (\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_N) \in \mathbb{H}^{m,n}$,

i) $\hat{X} = (\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_N) \in \mathbb{H}^{n^*}$ satisfaz, para $i = 1, \ldots, N$

$$\hat{X}_i - (A_i + B_i\hat{F}_i)^* \mathcal{E}_i(\hat{X})(A_i + B_i\hat{F}_i) = \mathcal{O}_i(\hat{F}).$$

Então, para $i = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned}(\hat{X}_i - X_i) - (A_i + B_i\hat{F}_i)^* \mathcal{E}_i(\hat{X} - X)(A_i + B_i\hat{F}_i) = \mathcal{R}_i(X) + \\ (\hat{F}_i - \mathcal{F}_i(X))^* \mathcal{D}_i(X)(\hat{F}_i - \mathcal{F}_i(X))\end{aligned} \tag{3.3.a}$$

ii) Também, se $\hat{X} \in \mathbb{L}$, então para $i = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned}(\hat{X}_i - X_i) - (A_i + B_i\hat{F}_i)^* \mathcal{E}_i(\hat{X} - X)(A_i + B_i\hat{F}_i) = \mathcal{R}_i(X) + \\ (\mathcal{F}_i(\hat{X}) - \mathcal{F}_i(X))^* \mathcal{D}_i(X)(\mathcal{F}_i(\hat{X}) - \mathcal{F}_i(X)) + \\ (\hat{F}_i - \mathcal{F}_i(\hat{X}))^* \mathcal{D}_i(\hat{X})(\hat{F}_i - \mathcal{F}_i(\hat{X}))\end{aligned} \tag{3.3.b}$$

iii) Além disso, se $\hat{Y} = (\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_N) \in \mathbb{H}^{n^*}$ e satisfaz, para $i = 1, \ldots, N$,

$$\hat{Y}_i - (A_i + B_i\mathcal{F}_i(\hat{X}))^* \mathcal{E}_i(\hat{Y})(A_i + B_i\mathcal{F}_i(\hat{X})) = \mathcal{O}_i(\mathcal{F}_i(\hat{X})),$$

então para $i = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned}(\hat{X}_i - \hat{Y}_i) - (A_i + B_i\mathcal{F}_i(\hat{X}))^* \mathcal{E}_i(\hat{X} - \hat{Y})(A_i + B_i\mathcal{F}_i(\hat{X})) = \\ (\hat{F}_i - \mathcal{F}_i(\hat{X}))^* \mathcal{D}_i(\hat{X})(\hat{F}_i - \mathcal{F}_i(\hat{X}))\end{aligned} \tag{3.3.c}$$

3.4.2 Resultados principais sobre soluções máximas

O teorema abaixo contém o resultado principal desta seção. Ele fornece condições suficientes para a existência de uma solução máxima para as EARA (3.2) dentro do conjunto $\hat{\mathbb{M}}$.

Teorema 3.5: Suponha que o par (A, B) seja estabilizável na média quadrática (veja definição 2.7 na página 13) e que $\mathbb{M} \neq \emptyset$. Então para $l = 1, 2, \ldots$, existe $X^l = (X_1^l, \ldots, X_N^l)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $X^l \in \mathbb{N}$; (3.4.a)

ii) $X^0 \geq X^1 \geq \cdots \geq X^l \geq X$, para $X \in \mathbb{M}$ arbitrário; (3.4.b)

iii) $r_\sigma(\mathcal{L}^l) < 1$, onde $\mathcal{L}^l(.) = (\mathcal{L}_1^l(.), \ldots, \mathcal{L}_N^l(.))$ e para $i = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^l(X^l) &:= A_i^{l*}\mathcal{E}_i(X^l)A_i^l \\ A_i^l &:= A_i + B_iF_i^l \\ F_i^l &:= \mathcal{F}_i(X^{l-1}) \text{ para } l = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{3.4.c}$$

iv) $$X_i^l - A_i^{l*}\mathcal{E}_i(X^l)A_i^l = \mathcal{O}_i(F^l),\ i = 1, \ldots, N. \tag{3.4.d}$$

Além disso, existe $X^+ = (X_1^+, \ldots, X_N^+) \in \hat{\mathbb{M}}$ tal que $X^+ \geq X$ para qualquer $X \in \mathbb{M}$ e $X^l \to X^+$ quando $l \to \infty$. Vale também que $r_\sigma(\mathcal{L}^+) \leq 1$, onde $\mathcal{L}^+(.) = (\mathcal{L}_1^+(.), \ldots, \mathcal{L}_N^+(.))$ é definido como $\mathcal{L}_i^+(.) = A_i^{+*}\mathcal{E}_i(.)A_i^+$ para $i = 1, \ldots, N$ e

$$\begin{aligned} F_i^+ &= \mathcal{F}_i(X^+) \\ A_i^+ &= A_i + B_iF_i^+. \end{aligned}$$

Prova: Inicialmente aplica-se indução finita em l para mostrar que as equações (3.4.a)-(3.4.d) são satisfeitas. Considere $X \in \mathbb{M}$ arbitrário. Pela hipótese de que (A, B) é estabilizável na média quadrática, é possível encontrar F^0 tal que $r_\sigma(\mathcal{L}^0) < 1$, onde $\mathcal{L}^0(.) = (\mathcal{L}_1^0(.), \ldots, \mathcal{L}_N^0(.))$ e $\mathcal{L}_i^0(.) = A_i^{0*}\mathcal{E}_i(.)A_i^0$, com $A_i^0 = A_i + B_iF_i^0$.. Portanto, da proposição 2.6 na página 12, existe uma única solução $X^0 = (X_1^0, \ldots, X_N^0) \in \mathbb{H}^n$ para

$$X_i^0 - A_i^{0*}\mathcal{E}_i(X^0)A_i^0 = \mathcal{O}_i(F^0),\ i = 1, \ldots, N.$$

Além disso, uma vez que $\mathcal{O}(F^0)$ - é hermitiana, tem-se que X^0 é também hermitiana. Definindo para $i = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned} D_i &:= \mathcal{D}_i(X) \\ F_i &:= \mathcal{F}_i(X), \end{aligned}$$

tem-se do lema 3.4, equação (3.4.a), que para $i = 1, \ldots, N$,

$$(X_i^0 - X_i) - A_i^{0*}\mathcal{E}_i(X^0 - X)A_i^0 = \mathcal{R}_i(X) + (F_i^0 - F_i)^*D_i(F_i^0 - F_i),$$

e uma vez que $\mathcal{R}_i(X) + (F_i^0 - F_i)^*D_i(F_i^0 - F_i)$ para $i = 1, \ldots, N$ e $r_\sigma(\mathcal{L}^0) < 1$, tem-se da proposição 2.6 novamente que $X^0 - X \geq 0$. Isso mostra adicionalmente que $X_i^0 \in \mathbb{N}$, pois

$$D_i^0 := B_i^*\mathcal{E}_i(X^0)B_i + R_i \geq B_i^*\mathcal{E}_i(X)B_i + R_i = D_i > 0$$

e portanto as equações (3.4.a)-(3.4.d) são válidas para $l = 0$.

Suponha agora que já tenha sido obtida uma sequência $\{X^l\}_{l=0}^{k-1}$ satisfazendo as equações

(3.4.a)-(3.4.d). Sejam:

$$D_i^{k-1} := \mathcal{D}_i(X^{k-1})$$
$$F_i^k := \mathcal{F}_i(X^{k-1})$$
$$A_i^k := A_i + B_i F_i^k.$$

Da equação (3.3.b) do lema 3.4,

$$\begin{aligned}(X_i^{k-1} - X_i) - A_i^{k*}\mathcal{E}_i(X^{k-1} - X)A_i^k &= \\ = \mathcal{R}_i(X) + (F_i^k - F_i)^* D_i(F_i^k - F_i) + (F_i^k - F_i^{k-1})^* D_i^{k-1}(F_i^k - F_i^{k-1}) &= \\ \geq (F_i^k - F_i^{k-1})^* D_i^{k-1}(F_i^k - F_i^{k-1}).\end{aligned}$$

e como $D_i^{k-1} > 0$ para $i = 1, \ldots, N$ (pela hipótese de indução), então é possível encontrar um número real $\delta^{k-1} > 0$ tal que $D_i^{k-1} > \delta^{k-1} I$. Portanto, para $i = 1, \ldots, N$,

$$(X_i^{k-1} - X_i) - A_i^{k*}\mathcal{E}_i(X^{k-1} - X)A_i^k \geq \delta^{k-1}(F_i^k - F_i^{k-1})^*(F_i^k - F_i^{k-1}),$$

e do lema 2.13 na página 17, $r_\sigma(\mathcal{L}^k) < 1$. Seja X^k a única solução hermitiana de (considere a proposição 2.6 e note que $\mathcal{O}(F^l)$ é hermitiana)

$$X_i^k - A_i^{k*}\mathcal{E}_i(X^k)A_i^k = \mathcal{O}_i(F^l) \text{ para } i = 1, \ldots, N.$$

Da equação (3.3.a) do lema 3.4, tem-se que para $i = 1, \ldots, N$,

$$(X_i^{k-1} - X_i) - A_i^{k*}\mathcal{E}_i(X^{k-1} - X)A_i^k = \mathcal{R}_i(X) + (F_i^k - F_i)^* D_i(F_i^k - F_i)$$

e uma vez que $r_\sigma(\mathcal{L}^k) < 1$, tem-se da proposição 2.6 que $X^k \geq X$. Portanto $D^k \geq D \geq 0$, o que mostra que $X^k \in \mathbb{N}$.

Da equação (3.3.c) do lema 3.4, tem-se que para $i = 1, \ldots, N$

$$(X_i^{k-1} - X_i^k) - A_i^{k*}\mathcal{E}_i(X^{k-1} - X^k)A_i^k = (F_i^k - F_i^{k-1})^* D_i^{k-1}(F_i^k - F_i^{k-1}),$$

o que, ao lado dos fatos de que $r_\sigma(\mathcal{L}^k) < 1$ e que $(F_i^k - F_i^{k-1})^* D_i^{k-1}(F_i^k - F_i^{k-1}) \geq 0$ para $i = 1, \ldots, N$ e da proposição 2.6, mostra que $X^{k-1} \geq X^k \geq X$. Com isso se completa o argumento de indução finita para as equações (3.4.a)-(3.4.d). Uma vez que $\{X^l\}_{l=0}^{\infty}$ é uma sequência decrescente com $X^l \geq X$ para todo $l = 0, 1, \ldots$, tem-se que existe X^+ hermitiana tal que (veja [56], p.79) $X^l \downarrow X^+$ à medida que $l \to \infty$. Claramente $X^+ \geq X$, e portanto

$\mathcal{D}(X^+) \geq \mathcal{D}(X) > 0$, mostrando que $X^+ \in \mathbb{N}$. Além disso, substituindo $F_i^l = \mathcal{F}_i(X^{l-1})$ em (3.4.d) e tomando o limite quando $l \to \infty$, obtém-se para $i = 1, \ldots, N$

$$0 = X_i^+ - (A_i + \mathcal{F}_i(X^+))^* \mathcal{E}_i(X^+)(A_i + \mathcal{F}_i(X^+)) - \mathcal{O}_i(\mathcal{F}_i(X^+)).$$

Rearranjando os termos da equação acima, tem-se para $i = 1, \ldots, N$

$$X_i^+ = A_i^* \mathcal{E}_i(X^+)A_i + Q_i - (A_i^* \mathcal{E}_i(X^+)B_i + L_i)(B_i^* \mathcal{E}_i(X^+)B_i + R_i)^{-1}(B_i^* \mathcal{E}_i(X^+)A_i + L_i^*),$$

ou seja, $\mathcal{R}(X^+) = 0$, o que mostra o resultado desejado. Como X é arbitrária em $\mathbb{M}$, então $X^+ \geq X$ para todo $X \in \mathbb{M}$. Finalmente, note que como $r_\sigma(\mathcal{L}^k) < 1$, tem-se que (veja [52], p.328, com argumentos sobre a continuidade dos autovalores quando se toma o limite da série) $r_\sigma(\mathcal{L}^+) \leq 1$, onde $\mathcal{L}_i^+(.) = A_i^{+*} \mathcal{E}_i(.)A_i^+$, $A_i^+ = A_i + B_i F_i^+$. com $F_i^+ = \mathcal{F}_i(X^+)$.

□

O teorema acima mostrou a existência de uma solução máxima X^+ para as EARA, quando certas condições são satisfeitas, basicamente estabilizabilidade do sistema e a existência de um certo conjunto convexo. O próximo resultado estabelece uma ligação entre um problema de otimização com DML´s (desigualdades matriciais lineares) e a solução máxima X^+ em $\hat{\mathbb{M}}$. Tal resultado é que permitirá que o problema possa ser efetivamente resolvido, isto é, que dado um sistema, seja possível calcular numericamente uma solução máxima para as EARA associadas, e caso essa seja uma solução estabilizante, projetar a lei de controle ótima para o sistema. O próximo capítulo trata especificamente de soluções estabilizantes para as EARA. Para o momento basta saber que não necessariamente a solução máxima é estabilizante, porém se a solução estabilizante existir, ela coincidirá com a solução máxima (veja o lema 4.2 na página 36 a esse respeito). Do ponto de vista prático, é preciso apenas verificar se a solução máxima obtida estabiliza o sistema. Em caso afirmativo, o problema está resolvido. Em caso negativo, não existe solução estabilizante e o problema não tem solução.

O resultado a seguir pode ser visto como a generalização de um resultado apresentado em [48], para o caso em que $L_i \neq 0$ e Q_i e R_i são indefinidas (isto é, não necessariamente positivas definidas ou semidefinidas). Considere então o seguinte problema de programação convexa. Suponha que todas as matrizes envolvidas nesse problema sejam reais (sem perda de generalidade, conforme comentado no capítulo 2). Ele é expresso como

$$\max \operatorname{tr}\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big) \tag{3.5.a}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} -X_i + A_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i + Q_i & A_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + L_i \\ B_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i + L_i^* & B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.5.b}$$

$$B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i > 0 \tag{3.5.c}$$

$$X_i = X_i^* \tag{3.5.d}$$

para $i = 1, \ldots, N$.

Note que esse problema equivale a determinar $X \in \mathbb{M}$, e dentro desse conjunto obter X máximo.

Teorema 3.6: Suponha que (A, B) é estabilizável na média quadrática. Então existe $X^+ \in \hat{\mathbb{M}}$ tal que $X^+ \geq X$ para todo $X \in \mathbb{M}$ se e somente se existir uma solução $\hat{X}$ para o problema de programação convexa acima (3.5.a)-(3.5.d). Além disso, $\hat{X} = X^+$.

Prova: Inicialmente note que, pelo complemento de Schur (veja o comentário 2.1 na página 10), $X = (X_1, \ldots, X_N)$ satisfaz as restrições (3.5.b)-(3.5.d) se e somente se, para $i = 1, \ldots, N$,

$$-X_i + A_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i + Q_i - (A_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + L_i)(B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i)^{-1}(B_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i + L_i^*) \geq 0$$
$$B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i > 0$$
$$X_i = X_i^*$$

ou seja, se e somente se $X \in \mathbb{M}$ (note que isso também mostra que $\mathbb{M}$ é um conjunto convexo).

(suficiência): Se $X^+ \in \mathbb{M}$ é tal que $X^+ \geq X$ para todo $X \in \mathbb{M}$, claramente $\operatorname{tr}(X_1^+ + \cdots + X_N^+) \geq \operatorname{tr}(X_1 + \cdots + X_N)$ para todo $X \in \mathbb{M}$, e uma vez que $X^+ \in \hat{\mathbb{M}} \subset \mathbb{M}$, segue que X^+ é uma solução para o problema de programação convexa (3.5.a)-(3.5.d).

(necessidade): Partindo do fato de que $\hat{X} \in \mathbb{M} \neq \emptyset$ e do teorema 3.5, tem-se que existe $X^+ \in \mathbb{M}$ tal que $X^+ \geq \hat{X}$. Porém da otimalidade de $\hat{X}$ (que é solução do problema de programação convexa) e do fato de que $\hat{\mathbb{M}} \subset \mathbb{M}$, tem-se que

$$\operatorname{tr}(X_1^+ - \hat{X}_1) + \cdots + \operatorname{tr}(X_N^+ - \hat{X}_N) \leq 0 .$$

Isso, ao lado do fato de que $X_1^+ - \hat{X}_1 \geq 0, \ldots, X_N^+ - \hat{X}_N \geq 0$, só pode ser verdadeiro se $X_1^+ = \hat{X}_1, \ldots, X_N^+ = \hat{X}_N$.

□

3.5 Conclusões

Os resultados apresentados neste capítulo se constituem num ferramental básico coerente e tão completo quanto possível para o tratamento do problema de controle ótimo linear-quadrático para sistemas lineares discretos sujeitos a saltos markovianos.

Em particular, na seção 3.4 foram apresentadas condições suficientes para a existência de soluções máximas para as equações de Riccati acopladas associadas ao problema de controle ótimo, bem como uma formulação adequada em termos de um problema de programação convexa, que pode ser resolvido numericamente com relativa facilidade. Como é sabido e será discutido em maior detalhe no capítulo 4, sempre que soluções estabilizantes (estas sim de real interesse do ponto de vista de Controle) existem, elas coincidem com as soluções máximas, de modo que resolver o problema em termos de soluções máximas é, para todos os efeitos práticos, o mesmo que efetivamente resolvê-lo em termos de soluções estabilizantes.