# capítulo 1

# Introdução

## 1.1 Primeiras palavras

Este trabalho, como o seu título indica, trata de alguns algoritmos de controle para sistemas sujeitos a saltos markovianos. Mais precisamente para sistemas lineares a tempo discreto sujeitos a saltos dentro de uma cadeia de Markov[1] de estado finito. O que é um sistema desse tipo, e os conceitos matemáticos apropriados para o seu tratamento serão discutidos no decorrer do texto.

O objetivo deste trabalho é, após apresentar os conceitos iniciais necessários, propor algoritmos de controle para essa classe especial de sistemas, e mais do que isso, apontar maneiras factíveis e eficientes para se realizar o projeto dos controladores associados a cada algoritmo. Quatro problemas de controle são considerados aqui:

i) Controle ótimo linear-quadrático;
ii) Controle $H_\infty$;
iii) Controle $H_2$;
iv) Controle misto $H_2/H_\infty$.

Resultados originais relativos a esses quatro problemas, incluindo propostas para resolvê-los serão

[1] **Andrei Andreyevich Markov** (1865-1922). Matemático russo, mais conhecido por ter estudado o que hoje se denominam cadeias de Markov. Aluno de Chebyshev, mais tarde também se tornou professor na Universidade de São Petesburgo.

objeto dos capítulos seguintes. Este capítulo apresenta apenas uma introdução ao tema e uma descrição geral do corpo do trabalho todo.

## 1.2 Plano geral

Este trabalho é composto de oito capítulos e um apêndice. No primeiro capítulo (este) é feita apenas uma introdução ao tema. A parte técnica do trabalho se inicia no capítulo 2, que apresenta a notação utilizada e os conceitos matemáticos básicos relacionados a sistemas markovianos, incluindo o conceito de estabilidade e as normas $H_2$ e $H_\infty$ específicos para essa classe de sistemas, bem como alguns resultados auxiliares, utilizados nos capítulos seguintes. O capítulo 3 trata do problema de controle ótimo linear-quadrático, resolvido por meio de *equações algébricas de Riccati acopladas* (EARA). O problema é abordado por meio da obtenção das chamadas *soluções máximas* para as EARA via um problema de programação convexa. O capítulo 4 apresenta alguns resultados envolvendo a existência das chamadas *soluções estabilizantes* para as EARA e relaciona a existência dessas soluções com a existência de uma solução para o problema de controle $H_2$ e para um problema de programação convexa. O capítulo 5 faz uso dos resultados apresentados no capítulo 3 para obter uma solução para o problema de controle $H_\infty$ através de um algoritmo recursivo, enquanto que o capítulo 6 apresenta uma solução para o problema de controle misto $H_2/H_\infty$ por meio de uma aproximação. Esta aproximação, apesar de levar a soluções para o problema possivelmente conservadoras, põe o problema de controle na forma de um problema de programação convexa, o que é extremamente conveniente para a sua resolução. A formulação utilizada permite também que se aborde o problema de controle $H_\infty$, levando a uma solução ótima para um problema aproximado. O capítulo 7 apresenta alguns exemplos simples de projeto de controladores e simulações computacionais para ilustrar as diferentes técnicas propostas neste trabalho, enquanto o capítulo 8, que finaliza o trabalho, contém alguns comentários e conclusões.

O apêndice contém a descrição das rotinas

## 1.3 Breve introdução a sistemas sujeitos a saltos markovianos

Muita atenção tem sido devotada nos últimos anos a sistemas dinâmicos sujeitos a variações abruptas em suas estruturas. O interesse reside em se poder modelar fenômenos tais como ocorrência de falhas, reparos, mudanças ambientais súbitas, variação do ponto de operação de uma planta não-linear, etc.

Os sistemas lineares discretos sujeitos a saltos markovianos se inserem dentro desse contexto como uma importante família de sistemas sujeitos a variações abruptas. No caso deste trabalho, essas variações abruptas são modeladas por uma cadeia de Markov, assumindo valores num con-

junto finito contável, sendo que cada uma dessas variações abruptas ou saltos leva o sistema a se comportar como um sistema linear discreto, diferente ou não do sistema linear discreto cujo comportamento o sistema markoviano emulava antes do salto.

Dentro da literatura recente, muitos trabalhos podem ser mencionados, os quais tratam de sistemas sujeitos a saltos markovianos. Por exemplo [1], [5], [6], [7], [11], [12]-[19], [24], [25], [31]-[35], [40]-[42], [45], [47], [48], [54].

Porém, em termos mais simples e pouco rigorosos, como seria um sistema markoviano como descrito acima? Considere o seguinte exemplo: Um sistema sujeito a variações abruptas que pode assumir quatro comportamentos distintos, chamados também de *modos de operação*, cada um descrito por um conjunto de equações de diferenças ou diferenciais, cuja estrutura particular não tem importância no momento (porém note que este trabalho assumirá sempre que os modos de operação são descritos como sistemas invariantes lineares discretos) denotados por $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ e $\Sigma_4$. Assuma que a cada instante de tempo, o modo de operação que descreve o sistema seja conhecido e que as transições entre modos de operação sejam dadas por uma cadeia de Markov, isto é, dado que o sistema se encontra em um modo de operação, são conhecidas as probabilidades de que, no próximo instante de tempo o sistema continue no mesmo modo de operação ou passe para qualquer dos outros modos de operação possíveis. Isso pode ser expresso na forma de uma matriz de probabilidades de transição, que para este exemplo teria a seguinte estrutura:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix},$$

onde $p_{ij}$ representa a probabilidade do sistema se transferir do modo de operação $i$ para o modo de operação $j$, isto é, deixar abruptamente de ser descrito precisamente pelo modelo $\Sigma_i$ e passar a ser descrito pelo modelo $\Sigma_j$. Claramente se deve ter que a soma dos elementos de cada linha da matriz $P$ seja unitária, bem como que cada $p_{ij}$ seja positivo. A figura 1-1 apresenta um esquema do sistema descrito acima. Note que os círculos representam os modos de operação e as setas, as possíveis transições entre eles.

Não basta, e este é um fato fundamental, utilizar controladores que estabilizem cada modo de operação independentemente e agrupá-los para se controlar o sistema markoviano, pois o próprio conceito de estabilidade adequado para essa classe de sistemas é diferente do habitual (isso será tratado no capítulo 2). Com o devido cuidado, muitos resultados conhecidos para o caso *determi-*

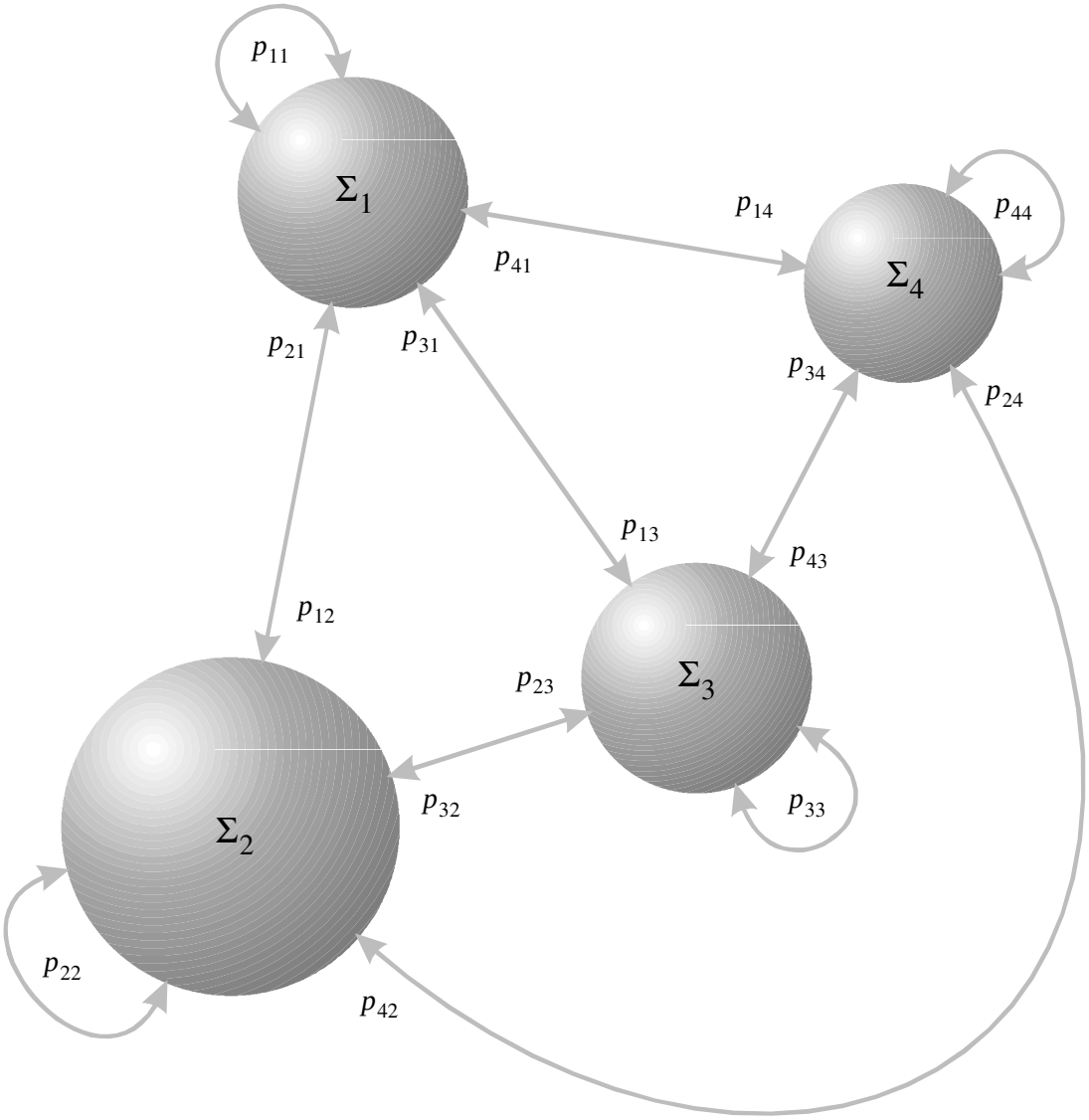


Figura 1-1: Esquema de um sistema markoviano com quatro modos de operação

*nístico* podem ser estendidos para o caso markoviano, e é isso, basicamente, o que é feito aqui. Note que o termo determinístico é usado neste trabalho para denotar sistemas que tenham apenas um modo de operação, mesmo que possuam componentes estocásticas, tais como ruídos, etc.

É natural que uma vez que se conheça o estado da cadeia de Markov, como é assumido aqui, se faça uso dessa informação para o controle, de modo que a estrutura comum para a solução de todos os problemas considerados neste trabalho fará uso de controladores dependentes do modo de operação do sistema.

## 1.4 Ferramental básico

As principais ferramentas básicas utilizadas neste trabalho, e para as quais cabe tecer alguns comentários, são as seguintes: equações de Riccati[1] (em sua versão acoplada, adequada para sistemas markovianos) e programação convexa. A rigor este não é um trabalho especificamente sobre esses dois assuntos, apesar de alguns resultados originais envolvendo equações algébricas de Riccati acopladas serem objeto dos capítulos 3, 4 e 5. Em particular para programação convexa, apenas técnicas e resultados consagrados são utilizados. As subseções a seguir visam tão somente situar o leitor dentro do universo desses dois temas, muito vasto e além do escopo pretendido, portanto tratados aqui com brevidade.

### 1.4.1 Sobre equações de Riccati

Equações algébricas de Riccati surgem em diversos problemas, tanto de filtragem como de controle e otimização. Em particular, se tratará aqui dos problemas de controle linear-quadrático (no capítulo 3), controle $H_2$ (capítulo 4) e controle $H_\infty$ (no capítulo 5) para sistemas lineares a tempo discreto, sujeitos a saltos markovianos.

A importância da equação de Riccati como ferramenta para a solução de tais problemas e a atenção que ela vem merecendo ao longo dos anos por parte da comunidade acadêmica podem ser confirmados pela extensa literatura a respeito produzida até o momento. Uma breve lista de textos é apresentada como referência para este trabalho, incluindo [3], [9], [10], [20], [30], [39], [46], [49], [50], [55], [57] e [59]. Tal lista, longe de visar esgotar o assunto, se constitui numa pequena amostra dos mais recentes trabalhos a respeito de equações de Riccati.

Um dos mais bem sucedidos enfoques para se analisar equações de Riccati faz uso de métodos geométricos, nos quais o conceito de *subespaço deflacionado* (também chamado de *subespaço invariante*, um nome talvez mais adequado) associado a um *feixe matricial simplético* tem um importante papel (veja por exemplo [3], [30], [44], [55]).

Em se tratando de problemas de controle, como é o caso aqui, em geral se está interessado em obter a *solução estabilizante* para a equação de Riccati, isto é, uma solução que dá origem a uma matriz de realimentação de estado que estabiliza o sistema em malha fechada. Dentro desse contexto, a *solução máxima* (a maior entre todas as soluções) da equação de Riccati também é de interesse, pois é fato conhecido que a solução máxima coincide com a solução estabilizante quando esta última existe. O problema da obtenção de soluções máximas é tratado em diversos artigos,

[1] Conde **Jacopo Francesco Riccati** (1676-1754). Matemático italiano (à época, República de Veneza) autodidata. As equações de Riccati, estudadas por ele com outros propósitos, têm hoje grande importância em Controle e disciplinas correlatas (veja [4] a esse respeito).

dos quais pode-se mencionar [49] (bem como [20] e [44]), onde uma condição suficiente, utilizando o conceito de *estabilizabilidade* e a hipótese de um certo conjunto convexo não ser vazio, é obtida para garantir a existência de uma solução máxima hermitiana para a equação de Riccati.

### 1.4.2 Sobre programação convexa

Nos últimos anos, grande ênfase tem sido dada à solução de problemas de controle via problemas de otimização convexos envolvendo *desigualdades matriciais lineares* (DML´s). A relação entre controle e DML´s é conhecida há muito tempo. A própria equação de Lyapunov[1] (uma versão markoviana desta equação é introduzida no capítulo 2), que data do final do século XIX, pode ser vista como uma DML associada a um problema de controle. O interesse recente surgiu em função do desenvolvimento de métodos numéricos extremamente eficientes para a resolução dessa classe de problemas, especialmente a partir da década de 80.

A maioria dos problemas apresentados aqui é resolvida com auxílio de programação convexa. Não faz parte dos objetivos deste trabalho a discussão ou apresentação de resultados sobre o tema, por isso no desenvolvimento dos resultados, um problema é dado como satisfatoriamente resolvido quando é expresso na forma de um problema de programação convexa. Para maiores informações sobre programação convexa e DML´s, [2] e [8] são textos básicos, porém bastante extensivos sobre o tema.

De uma forma geral, e especialmente no que concerne a este trabalho, DML´s não acrescentam nenhum conhecimento qualitativo sobre os problemas estudados, porém se constituem numa excelente ferramenta para se obter soluções para problemas que de outra forma não poderiam ser resolvidos.

[1] **Aleksandr Mikhailovich Lyapunov** (1857-1918). Matemático russo, colega de Markov e aluno de Chebyshev, conhecido por suas contribuições para a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos. Os métodos de Lyapunov, propostos em 1899, são uma das mais importantes ferramentas dentro da Teoria de Controle.