

CONTROLE DIGITAL-PTC-2419

Prof. Paulo Sérgio

**Tabela de Transformadas
Tabela para Anti-transformação
3 Listas de Exercícios
3 Trabalhos**

Tabela de Transformadas Z

	X(s)	x(t)	x(kT) ou x _k	X(z)
1	—	—	$\delta_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$	1
2			$\delta_{k-n} = \delta_{n-k}$	z^{-n}
3	1/s	1(t)	1 _k	z/(z-1)
4	1/s ²	t	kT	Tz/(z-1) ²
5	1/(s+a)	e ^{-at}	e ^{-akt}	z/(z-e ^{-aT})
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	1 - e ^{-at}	1 - e ^{-akt}	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$	sen(ωt)	sen(ωkT)	$\frac{z \text{sen}(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
8	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)}$	cos(ωt)	cos(ωkT)	$\frac{z [z - \cos(\omega T)]}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
9	$\frac{s \cos \phi - \omega \text{sen} \phi}{(s^2 + \omega^2)}$	cos(ωt + φ)	cos(ωkT + φ)	$\frac{z [z \cos \phi - \cos(\omega T - \phi)]}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
10	$\frac{1}{(s+a)^2}$	t e ^{-at}	kT e ^{-akT}	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
11	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	e ^{-at} sen ωt	e ^{-akT} sen ωkT	$\frac{z e^{-aT} \text{sen} \omega T}{z^2 - z e^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
12	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2}$	e ^{-at} cos ωt	e ^{-akT} cos ωkT	$\frac{z (z - e^{-aT} \cos \omega T)}{z^2 - z e^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
13	2/s ³	t ²	(kT) ²	$\frac{T^2 z (z+1)}{(z-1)^3}$
14			a ^k	$\frac{z}{(z-a)}$
15			$\left(\frac{k}{m}\right) a^{k-m}$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$

Tabela Alternativa Para Anti-Transformação

$X(z)$	x_k
z^{-n}	$\delta_{k-n} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$
$\frac{1}{(z^{-1} - b)}$	$-(b^{-(k+1)})$
$\frac{1}{(z^{-1} - b)^m}$	$(-1)^m C_{k+m-1}^k b^{-(k+m)}$
$\frac{\rho_1 e^{+j\theta_1}}{(z^{-1} - \rho e^{-j\theta})^m} + \frac{\rho_1 e^{-j\theta_1}}{(z^{-1} - \rho e^{+j\theta})^m}$	$(-1)^m 2 C_{k+m-1}^k \rho_1 \rho^{-(k+m)} \cos[\theta(k+m) + \theta_1]$

OBS : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$\frac{\rho_1 e^{+j\theta_1}}{(z^{-1} - \rho e^{-j\theta})} + \frac{\rho_1 e^{-j\theta_1}}{(z^{-1} - \rho e^{+j\theta})} \leftrightarrow -2 \rho_1 \rho^{-(k+1)} \cos[\theta(k+1) + \theta_1]$$

1a. Lista de exercícios de Controle Digital
Prof. Paulo Sérgio

1) Deduza a expressão da transformada $\mathcal{Z}$ das linhas 1 até 8 da tabela dada. Mostre que as transformada da linha 9 da *Tabela de Transformadas $\mathcal{Z}$* é verdadeira assumindo como verdadeiras as linhas 7 e 8.

2) Determinar a Transformada $\mathcal{Z}$ das seguintes seqüências :

- (a) $x_k = 1 + 3e^{-0.25t} \cos(k\pi/4 + \pi/6)$.
- (b) $x_k = 1/k!$ (dica : série de Taylor da exponencial).
- (c) $x_k = (-1)^k/(2k)!$ (dica : série de Taylor do cosseno).

3) Anti-transforme (não vale simular um sistema ou usar o método da divisão) fornecendo uma expressão analítica das seqüências:

- (a) $(z^2 + 2z + 3)/(z + 0.5)^2$
- (b) $z^2/[(z^2 + 0.01)^2(z + 0.5)]$
- (c) $\sin(1/z)$ (Dica : Exprima a função dada em uma série em $w = z^{-1}$ e compare termo a termo com a definição da transformada $\mathcal{Z}$).
- (d) $\frac{1}{1+z^{-2}}$.
- (e) $\frac{z(z-1)}{z^2+1.25z+0.25}$.
- (f) $\frac{z}{z^{-2}-2z+1}$.

Em cada caso, menos o item (c) obtenha um sistema discreto cuja transformada $\mathcal{Z}$ coincida com as funções dadas. Existe um sistema discreto linear invariante cuja função de transferência é $\sin(1/z)$?

4) Obtenha através de anti-transformada $\mathcal{Z}$ a resposta y_k do sistema discreto

$$y_k - 2y_{k-1} + 1,5y_{k-2} - 0.5y_{k-3} = u_{k-1} + 2uk - 2$$

para as seguintes situações :

- $y_{-1} = y_{-2} = y_{-3} = 0$ e u_k é a entrada degrau unitário.
- $y_{-1} = y_{-2} = y_{-3} = 1$ e u_k é a entrada nula.
- $y_{-1} = y_{-2} = y_{-3} = 1$ e u_k é a entrada dada por $\cos(kt)$.

Trabalho de Simulação (Parte I)

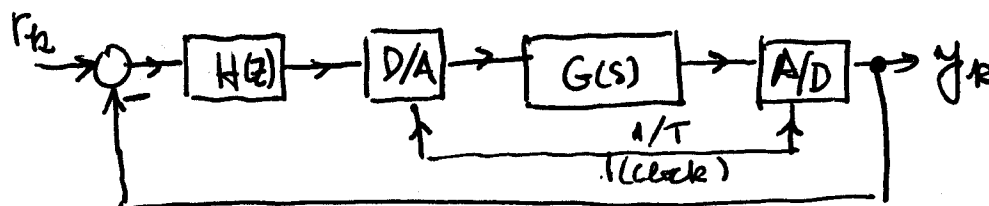
A) Para cada item do exercício 3 da primeira lista (menos o item (c)), pede-se simular a resposta ao impulso do sistema discreto correspondente e comparar com a anti-transformada obtida. Compare com os resultados analíticos obtidos.

B) Simule as respostas dos três itens do exercício 4 e compare com os resultados analíticos.

2a. Lista de Exercícios de Controle Digital
PTC2419 **Prof. Paulo Sérgio**

1 Exercício 1

Um motor DC, utilizado como um servo-posicionador, possui função de transferência $G(s) = 1/s(s + 2)$ (voltagem $u(t)$ como entrada, posição angular θ como saída). Usando uma certa técnica de projeto, um engenheiro calculou um controle digital da figura abaixo da forma $H(z) = K(z - 0.7)/(z - 0.25)$ e utilizou uma frequência de amostragem $T = 0.2$ segundos. Após um ajuste, o engenheiro escolheu o valor de $K = 13$.



Pede-se :

- (a) O equivalente discreto do subsistema D/A-Motor-A/D.
- (b) Fazer o lugar de raízes utilizando o MATLAB. Levantar aproximadamente a faixa de K em que o sistema é estável através do lugar de raízes (tente fazer contas através do critério de Jury, mas prepare-se porque elas são bastante complexas). Verifique se $K = 13$ está dentro da faixa de estabilidade da malha fechada.

2 Exercício 2

Um sistema discreto com entrada u_k e saída y_k possui função de transferência $G(z)$ da forma

$$G(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z + a_1}$$

onde a_1 , b_1 e b_2 são números reais e $|a_1| < 1$. Para identificar os valores de a_1 , b_1 e b_2 foram feitas duas experiências :

- Foi aplicado um degrau unitário em u_k . Foi observado que $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 5$.

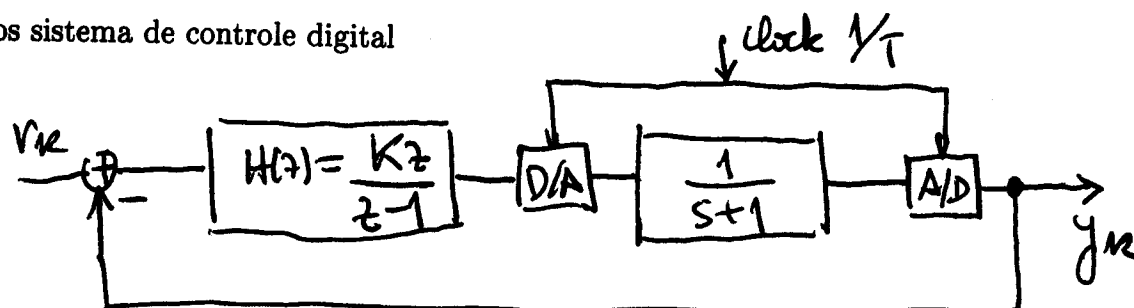
- Aplica-se uma entrada $u_k = \text{sen}(\alpha k)$ onde α é uma constante real tal que $e^{j\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}$. Verifica-se que a saída y_k tende para $2\text{sen}(\alpha k - \pi/4)$.

Pede-se :

- Determinar a função de transferência do sistema.
- Obter um sistema discreto cuja função de transferência seja a função obtida em (a).

3 Exercício 3

Dado os sistema de controle digital

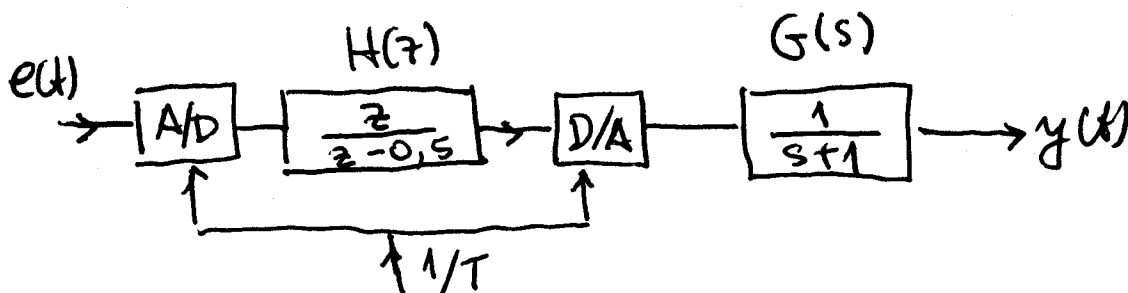


pede-se determinar :

- O equivalente discreto do subsistema D/A-G(s)-A/D em função de T .
- Seja $K = 1$. Verificar a faixa de T para o qual o sistema seja estável. Exibir um valor de T para o qual a malha fechada não seja estável para $K = 1$ (a estabilidade da malha pode depender da taxa de amostragem).
- Seja $T = 0.5$. Encontre a faixa de K para o qual o sistema seja estável.
- Determine o erro de regime discreto a degrau, rampa e parábola (aplicada em r_k) para um valor de K que estabilize o sistema com $T = 0.5$. Para este mesmo valor de K determine a resposta permanente do sistema em malha fechada quando $r_k = \cos(1, 2kT)$.
- Seja $T = 0.5$. Determine o equivalente analógico aproximado do subsistema A/D - $H(z)$ - D/A para $H(z) = Tz/(z - 1)$.

4 Exercício 4

Considere o sistema abaixo :



sabendo-se que $T = \pi$, pede-se :

(a) Esboce a resposta permanente vista por um analisador de espectro (que exhibe somente o módulo) quando $e(t) = \sin(\omega t)$. Para esse fim, é esboce um gráfico da função $\rho(j\hat{\omega}) = \left\| \frac{1}{T} H(e^{j\hat{\omega}}) \frac{(1 - e^{-j\hat{\omega}\pi})}{j\hat{\omega}} G(j\hat{\omega}) \right\|$ (se quiser use o MATLAB). Considerar a faixa entre 0 e 6 rad/s para os seguintes casos :

- (a.1) $\omega = 0.2$ rad/s ;
- (a.2) $\omega = 0.95$ rad/s;
- (a.3) $\omega = 1.95$ rad/s.

(b) Para cada um dos itens (a.1), (a.2), (a.3), esboce sobre o gráfico de $\rho(j\hat{\omega})$, a resposta permanente vista como uma função do tempo, justificando sucintamente a sua resposta para cada caso.

Trabalho de Simulação (Parte II)

(A) Para o exercício 1, usando $K = 13$, simule no MATLAB o sistema para uma entrada degrau discreta r_k e para dois conjuntos de condições iniciais :

- Condições iniciais nulas.
- Escolha condições iniciais não nulas de θ e $\dot{\theta}$ e condições iniciais nulas nas variáveis do controle.
- Determine o erro de regime teórico e o erro de regime a partir da simulação.

OBS: Não vale simular o sistema usando o equivalente calculado em no item (a) do primeiro exercício. Simule o sistema usando o modelo analógico da planta. Note que a conexão de um sistema discreto com um analógico no Simulink (do MATLAB) já inclui os conversores A/D e D/A implicitamente. Lembre-se de definir adequadamente a frequência de amostragem para no bloco do sistema discreto!

(B) Para o exercício 4, simule no simulink do matlab a resposta no tempo do sistema correspondentes aos itens (a1), (a2), e (a3), para verificar o esboço do item (b).

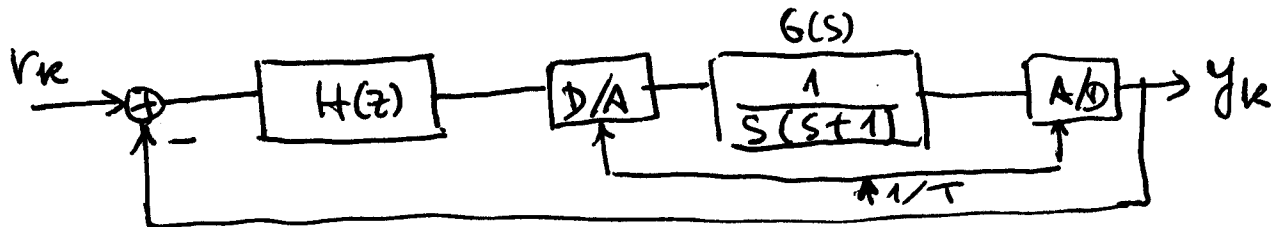
Para o sistema discreto obtido no exercício 2 parte (b), simular para dois conjuntos distintos de condições iniciais a resposta obtida nas experiências realizadas, tecendo comentários sobre a resposta transitória e a permanente. Compare com o resultado teórico previsto.

(C) Faça um diagrama de bode da resposta do item (e) do exercício 3 compreendendo a faixa de frequência que vai de $1/100$ até quatro vezes a taxa de Nyquist. Faça também um diagrama de Bode do integrador analógico. Compare os dois diagramas na faixa de frequência de $1/100$ a $1/5$ da taxa de Nyquist e também na faixa de $1/2$ a 4 vezes a taxa de Nyquist, tecendo comentários para cada faixa.

Terceira lista de exercícios — Controle Digital
Prof. Paulo Sérgio

1 Exercício único

Projete um controle digital $H(z)$ baseado em observador para o sistema abaixo:



Adote $T = 1/100$, e imponha os pólos do observador $(A - lC)$ em -2 e os do sistema $(A - Bf)$ em -0.5 .

OBS: Descreva $G(s)$ da forma de estado

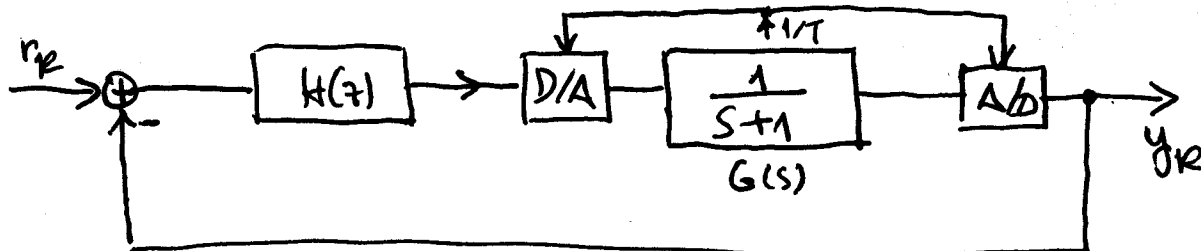
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

e depois discretize.

Simulações a ser realizadas no MATLAB (parte III) — Controle Digital
Prof. Paulo Sérgio

Pede-se projetar um controle digital $H(z)$ para o servomecanismo abaixo :

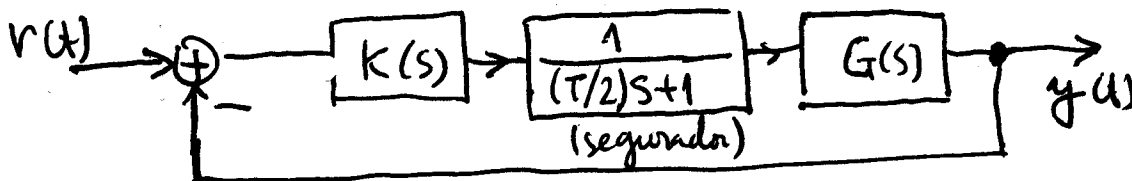


onde $G(s) = \frac{1}{s+1}$.

1) Pede-se inicialmente projetar um controlador analógico $K(s)$ de maneira a obter as seguintes características de desempenho :

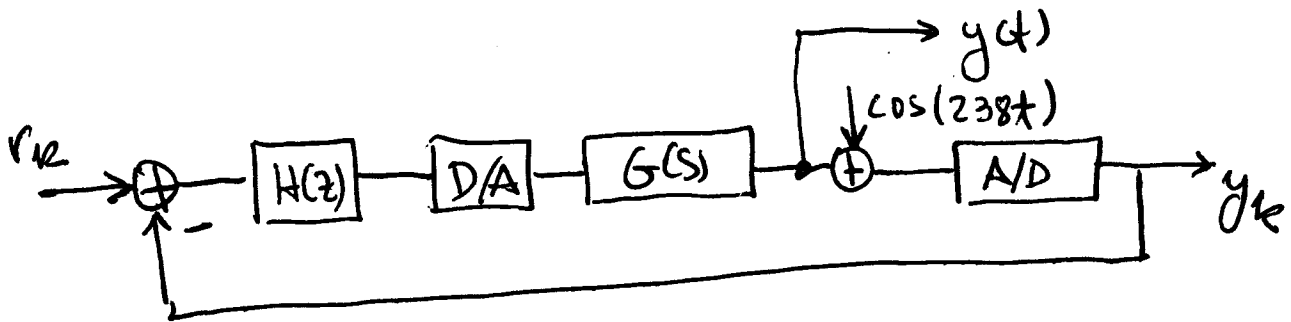
- E1. Todos os pólos de malha fechada possuam um fator de amortecimento $\xi > 0.4$ (lembre-se que $\xi = \cos \phi$, onde ϕ é o argumento do pólo $\rho \exp(j\phi)$).
- E2. Que a banda de malha fechada seja maior que 7 rad/s.
- E3. Que a margem de fase seja maior que 30° e a margem de ganho seja maior que 10 dB.
- E4. Que o coeficiente para o cálculo de erro de regime à rampa K_v seja maior que 20 (ou seja, o erro deve ser menor que $1/20$).

2) Avalie o efeito da amostragem no desempenho da malha fechada substituindo o efeito da conversão analógica digital pelo acréscimo na malha do bloco de função de transferência $\frac{1}{(T/2)s+1}$ (aproximação de primeira ordem de $\frac{1-e^{-sT}}{s}$). Para isso redetermine as especificações E1, E2, E3, E4 para o esquema abaixo. Use $\omega_a = 240$ rad/s e $\omega_a = 188$ rad/s ($\omega_a = 2\pi/T$). Teça comentários.

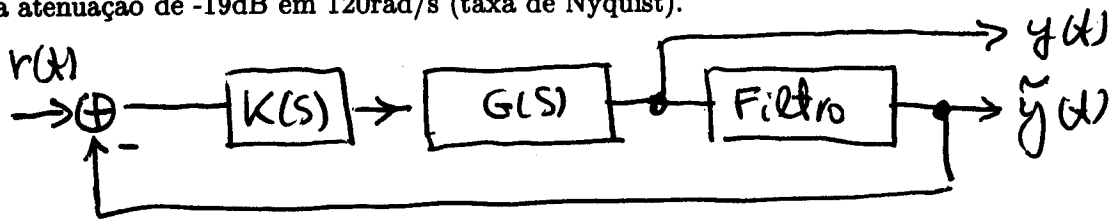


3) Utilize a transformação de Tustin para obter um controlador digital $H(z)$. Obtenha as equações discretas do controlador digital. Adote $T = 240$ rad/s.

4) Pede-se simular a ação de uma senóide de amplitude 1 e frequência 238 rad/s, como sendo uma perturbação aditiva ao sinal do sensor $y(t)$ conforme o esquema da figura abaixo. Interprete o resultado observado na simulação. (forneça $y(t)$ e y_k)



5) Projete um filtro anti-aliasing para eliminar o efeito indesejável da perturbação do item 4. Reavalie as especificações do projeto analógico na presença do filtro. Sugestão: Filtro Butterworth analógico de 4ª ordem com frequência de corte de 70 rad/s que acaba fornecendo uma atenuação de -19dB em 120rad/s (taxa de Nyquist).



6) Simule a resposta ao degrau e rampa (discretos) do sistema de controle digital abaixo nas seguintes situações :

- Sem filtro anti-aliasing e sem distúrbio.
- Sem filtro anti-aliasing e com distúrbio senoidal $w(t) = \cos(238t)$.
- Com filtro anti-aliasing e sem distúrbio.
- Com filtro anti-aliasing e com distúrbio senoidal $w(t) = \cos(238t)$.

Estime K_v a partir das simulações sem distúrbio. Avalie os efeitos desejáveis e indesejáveis do filtro. Compare as respostas obtidas tecendo comentários.

Forneça $y(t)$ e y_k em cada caso.

