$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de PTC-2417 Controle Não-Linear

Prof. Paulo Sergio — 2018

ATENÇÃO: A lista de exercícios não deve ser entregue, ela serve para voce se preparar para P2. Entregue apenas o segundo trabalho.

$1^{\underline{o}}$ Exercício

Mostre que o sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)
\end{aligned}
$$

É localmente assintoticamente estável, através da função da Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Este sistema é globalmente assintoticamente estável?

$2^{\underline{o}}$ Exercício

Considere o sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -f(x_2) - g(x_1)
\end{aligned}
$$

onde f, g são tais que
(i) f e g são contínuas;
(ii) $f(0) = g(0) = 0$; $\sigma f(\sigma) > 0$ e $\sigma g(\sigma) > 0$ para todo $\sigma \neq 0$.
(iii) $\lim_{x_1 \mapsto \infty} \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi \mapsto \infty$.
(a) Mostre, através da função de Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_2^2/2 + \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi$ que o sistema é estável.
(b) Aplique o teorema da LaSalle para mostrar que o sistema é globalmente assintoticamente estável.

$3^{\underline{o}}$ Exercício

Considere o sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -a\,sin(x_1) - kx_1 - dx_2 - cx_3 \\
\dot{x}_3 &= -x_3 + x_2
\end{aligned}
$$

Onde todos os coeficientes são positivos e $k > a$. Usando

$$
V(x) = kx_1^2 + x_2^2 + p\,x_3^2 + 2a \int_0^{x_1} sin(y)\,dy
$$

mostre que a origem é globalmente assintoticamente estável.

4º Exercício

As equações de movimento de um satélite são

$$\begin{aligned} \dot{d} &= -\omega \wedge d \\ J\dot{\omega} &= -\omega \wedge (J\omega) + \tau \end{aligned}$$

Onde $d(t) \in \mathbb{R}^3$ onde $d(t)$ é o vetor de orientação da antena bidirecional do satélite, $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade angular do satélite, $\tau(t) \in \mathbb{R}^3$ é o torque aplicado no sistema via jatos de gás, e J é a matriz de inércia do satélite (J é uma matriz simétrica definida positiva 3×3)[1]). Denotamos a transposta de uma matriz (ou de um vetor) por A^T e o produto vetorial ω e d por $\omega \wedge d$. Para todos $c = (c_1, c_2, c_3)^T, \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T, d = (d_1, d_2, d_3)^T \in \mathbb{R}^3$, temos

$$c^T(\omega \wedge d) = \det \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}$$

a) Seja $V_1 = \frac{1}{2}d^T d$. Mostrar que $\dot{V}_1 = 0$. Em particular , se inicializamos $\|d(0)\| = 1$ temos sempre $\|d(t)\| = 1, \forall t$. **OBS.** : Para definir a orientação da antena podemos sempre supor $\|d(t)\| = 1$.

(c) Seja $V_2 = \frac{1}{2}\omega^T J\omega$ (V_2 é a energia cinética do satélite). Mostrar que $\dot{V}_2 = \omega^T \tau$. Em particular, para torque nulo, a energia cinética é conservada.

(c) Considere a lei de controle

$$\tau(t) = -\alpha\omega(t) + \beta(d(t) \wedge b_0),$$

onde α, β são constantes positivas e $b_0 \in \mathbb{R}$ é um vetor unitário fixo que defina a direção desejada da antena do satélite. O objetivo do controle é obter $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} d(t) \wedge b_0 = 0$. Não se deseja aqui estabilizar o sistema em torno de um ponto de equilíbrio, mas deseja-se que o estado do sistema convirja para o conjunto M definido por

$$M = \{(d, \omega) \in \mathbb{R}^6 \mid \omega = 0 \text{ et } d \wedge b_0 = 0\}).$$

Pouco importa se $d \to b_0$ ou $d \to -b_0$). Seja

$$V(d, \omega) = \frac{1}{2}\omega^T J\omega + \beta\frac{1}{2}(d + b_0)^T(d + b_0)$$

c.1) Mostrar que $\dot{V} = -\alpha\|\omega\|^2$.
c.2) Mostrar que todo ponto de M é um ponto de equilíbrio e portanto M é invariante.
c.3) Utilizar o teorema de LaSalle para mostrar que o estado converge para M.

OBS:

(a) Se H é simétrica definida positiva, então $V = \xi(t)^T H\xi(t) > 0$ para todo $\xi \neq 0$ e

[1]Em particular, J é invertível.

$\dot{V} = 2\xi(t)^T H\dot{\xi}(t)$.
(b) $\frac{d}{dt}(a(t) \wedge b(t)) = \dot{a}(t) \wedge b(t) + a(t) \wedge \dot{b}(t)$

5º Exercício

Considere o modelo de pêndulo invertido

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{g}{l}\sin z_1 - \frac{\alpha}{lm}z_2 + u \end{aligned}$$

onde u é a entrada do sistema (torque aplicado na base do pêndulo). Pede-se:
(a) Projetar uma realimentação estabilizante $u = \phi(z_1, z_2)$ com o auxílio da função de Lyapunov $V(x) = \frac{1}{2}ml^2z_2^2 + \delta z_1^2$, onde $\delta > 0$ deve ser escolhido. Provar a estabilidade em malha fechada pela aplicação do teorema de LaSalle.
Projete o sistema de modo que $\dot{V}(x) = -\gamma z_2^2$ onde γ é uma constante a ser escolhida e forneça as equações do sistema em malha fechada.
(b) Compare o sistema em malha fechada obtido no item (a) com o sistema em malha fechada obtido via linearização exata e estabilização do sistema linear resultante.
(c) A partir do sistema em malha fechada do item (a), analise os efeitos de diferentes escolhas de γ e δ.

6ª Questão

Seja $g : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua, Pede-se
(a) Assumindo que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, Mostrar que o conjunto $A = \{x \in U \mid g(x) < 0\}$ é aberto.
(b) Assumindo que U é fechado, mostrar que o conjunto $A = \{x \in U \mid g(x) \neq 0\}$ é fechado.
Definição: Dado subconjuntos arbitrários $U \subset \mathbb{R}^n$, e $V \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que V é aberto em U (ou na topologia de U, ou ainda na topologia de subconjunto), se existir um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $V = A \cap V$. Dizemos que V é fechado em U, se existir um fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ tal que $V = F \cap V$.
(c) Mostrar que o conjunto $H = \{x \in U \mid g(x) < 0\}$ é aberto em U.
(d) Mostrar que o conjunto $H = \{x \in U \mid g(x) \leq 0\}$ é fechado em U.

7ª Questão

Provar o seguinte resultado (Lema da União dos Compactos).
Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Então existe uma coleção $\{K_j : j \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos compactos $K_j \subset D$ tais que:

$$D = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$$

sendo que, para todo $x \in D$ tal que $x \notin K_j$, pelo menos uma das duas afirmações abaixo sempre ocorre para todo $j > 0$:

(A) $\|x\| > j$.

(B) $\operatorname{dist}(x, \partial D) < 1/j$.

Segundo Trabalho de Simulação

Considere o sistema do 4º exercício da segunda lista.

1) Seja

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e escolha $b_0 \in \mathbb{R}^3$ com $\|b_0\| = 1$. Aplique a lei de controle do item (c) e simule o sistema para três condições iniciais $(d(0), \omega(0))$ distintas (sempre com $\|d(0)\| = 1$), sendo uma das condições iniciais com velocidade algular $\omega(0)$ não nula. Forneça os valores das três componentes de $d(t), \omega(t)$ e de $\tau(t)$ para cada simulação. Forneça os valores das três componentes de $d(t) \wedge b_0$ para cada caso. Comente os resultados encontrados com relação à teoria. Forneça os diagramas e os arquivos usados na simulaçao.