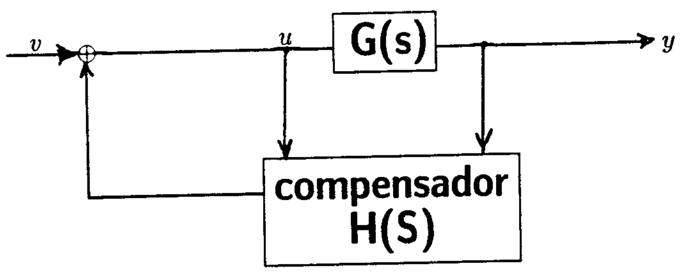
Cap. 5 - Compensador de Imposição de Pólos

Neste capítulo apresentaremos, como aplicação das teorias desenvolvidas nos capítulos 3 e 4, a construção de um compensador de estabilização. Em outras palavras queremos resolver o seguinte problema :

Problema do Compensador de Imposição de Pólos : Suponha dado um sistema linear invariante cuja matriz de transferência é G(s) (l, m), isto é, com l saídas e m entradas, possuindo os pólos $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Dada uma lista de pólos $\{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n\}$, desejamos projetar um compensador causal H(s) segundo o esquema abaixo, de maneira que a matriz de transferência do sistema em malha fechada (entrada $v(t)$ e saída $y(t)$) seja $\bar{G}(s)$ com pólos dados por $\{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n\}$, .



1. O PROBLEMA DO COMPENSADOR

Seja N(s), D(s) uma DMFd irredutível de G(s) *com D(s) de coluna reduzida.* (Como exercício mostre que isto sempre pode ser obtido com auxílio da proposição 5.3 do cap. 4). Note que

$$D(\boldsymbol{p})\,\xi(t) = I_m\,u(t) \tag{1.1.a}$$

$$y = N(\boldsymbol{p})\,\xi(t) \tag{1.1.b}$$

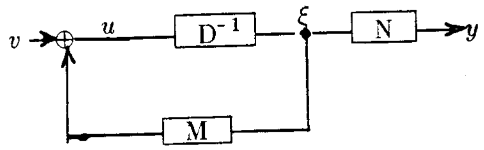
é uma descrição polinomial de um sistema cuja matriz de transferência é $G(s) = N\,D^{-1}$. Esquematicamente podemos representar

$$u \longrightarrow \boxed{D^{-1}} \xrightarrow{\ \xi\ } \boxed{N} \longrightarrow y$$

Esqueçamos por um momento da restrição da causalidade e do fato de termos somente acesso à saída y e não ao estado parcial ξ. Suponhamos então que podemos realizar uma lei de controle

$$u(t) = v(t) - M(\boldsymbol{p})\, \xi(t) \tag{1.2}$$

ou esquematicamente



Neste caso, substituindo-se (1.2) em (1.1), vemos que

$$D(\boldsymbol{p})\, \xi(t) = I_m (v(t) - M(\boldsymbol{p})\xi(t))$$

Logo, a nova descrição polinomial do sistema será

$$[D(\boldsymbol{p})+M(\boldsymbol{p})]\, \xi(t) = I_m v(t) \tag{1.3.a}$$

$$y = N(\boldsymbol{p})\, \xi(t) \tag{1.3.b}$$

Assim, pela escolha adequada de $P = D + M$ poderíamos impor os pólos da nova matriz de transferência $\bar{G}(s) = N(s)\, P^{-1}(s)$. Logo temos dois problemas a resolver para tornar factível este esquema de controle :

(i) Não temos acesso ao ξ, mas somente à saída y.

(ii) M(s) é polinomial e portanto não causal.

2. SOLUÇÃO DO PROBLEMA (i), FALTA DE ACESSO AO ξ

A solução de tal problema é equivalente ao problema de "observarmos" ξ tendo-se como informação o vetor de entrada u e o vetor de saída y (vide cap. 12).

Como N(s) e D(s) são primas à direita, aplicando a proposição 3.9 parte (iv) do cap. 3 podemos construir matrizes polinomiais X(s) e Y(s) tais que

$$X(s)\, N(s) + Y(s)\, D(s) = I_m \tag{2.1}$$

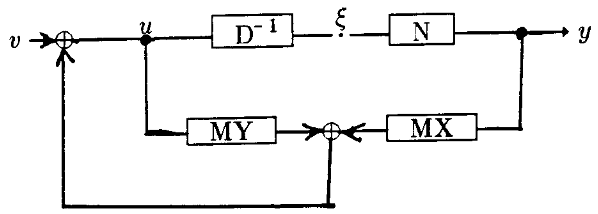
Esquecendo-se temporariamente do problema da causalidade (isto é, se pudéssemos realizar derivadores) mostraremos que o sinal $\eta(t)$ dado por

$$\eta(t) = X(p)\,y(t) + Y(p)\,x(t) \tag{2.2}$$

coincide com o sinal $\xi(t)$. De fato, substituindo-se (1.1.a) e (1.1.b) em (2.2) teremos

$$\begin{aligned}\eta(t) &= X(p)\,N(p)\,\xi(t) + Y(p)\,D(p)\,\xi(t) = \\ &= (X(p)\,N(p) + Y(p)\,D(p))\,\xi(t) = \qquad \text{(substituindo-se (2.1))} \\ &= I_m\,\xi(t) = \\ &= \xi(t)\end{aligned}$$

Assim, o seguinte esquema de controle seria equivalente à realimentarmos o sinal $M(p)\,\xi(t)$:



Tal esquema de controle não pode ser realizado porque MY e MX são matrizes polinomiais, e portanto temos um problema de causalidade.

3. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA CAUSALIDADE

A idéia é fazermos um "observador assintótico" para o sinal $M(p)\xi(t)$, isto é, realizarmos um sistema cujas entradas são os vetores $u(t)$ e $y(t)$ e cuja saída $y_c(t)$ tende assintóticamente para o sinal $M(p)\,\xi(t)$. Para isso realizaremos o sistema em descrição polinomial

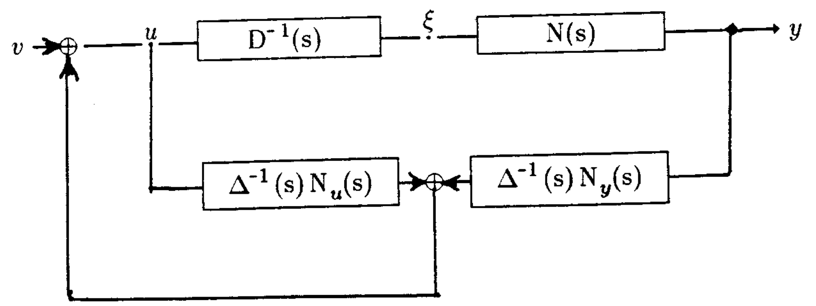
$$\Delta(p)\eta(t) = N_u(p)\,u(t) + N_y(p)\,y(t) \tag{3.1.a}$$

$$y_c(t) = \eta(t) \tag{3.1.b}$$

Associado à lei de controle em malha fechada :

$$u = v - y_c \tag{3.1.c}$$

Teremos esquematicamente o seguinte esquema de controle



Considerando-se o vetor de entradas do sistema (3.1) como sendo $\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$, note que a matriz de transferência do sistema (3.1) será dada por

$$G_c = \left[\ \Delta^{-1}N_u \quad \Delta^{-1}N_y \right] \tag{3.2}$$

Construiremos o compensador satisfazendo três condições :

(i) Para que o sistema (3.1) possa ser realizável, desejamos que $\Delta^{-1}N_u$ e $\Delta^{-1}N_y$ sejam matrizes racionais próprias.

(ii) Para o sistema (3.1) funcione como um observador de $M(\boldsymbol{p})\xi(t)$ é preciso que

$$N_u(\boldsymbol{p})\,D(\boldsymbol{p}) + N_y(\boldsymbol{p})\,N(\boldsymbol{p}) = \Delta(\boldsymbol{p})\,M(\boldsymbol{p}) \tag{3.3}$$

(iii) Para que o observador seja assintótico teremos que exigir a estabilidade de (3.1), ou seja, que $\det(\Delta)$ seja um polinômio Hurwitz.

De fato, as condições (i), (ii) e (iii) são suficientes para que o vetor e(t), denominado "erro de observação", dado por

$$e(t) = M(\boldsymbol{p})\,\xi(t) - \eta(t) \tag{3.4}$$

seja tal que $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$ (ou seja, temos $\eta(t)$ tendendo assintoticamente para $M(\boldsymbol{p})\,\xi(t)$). Para ver isso basta multiplicar a eq. (3.4) em ambos os lados pelo operador $\Delta(\boldsymbol{p})$, obtendo

$$\begin{aligned} \Delta(\boldsymbol{p})\,e(t) &= \Delta(\boldsymbol{p})M(\boldsymbol{p})\,\xi(t) - \Delta(\boldsymbol{p})\eta(t) = \qquad \text{(de (3.3) } \Rightarrow \text{)} \\ &= [N_u D + N_y N]\xi(t) - \Delta\eta(t) = \end{aligned}$$

$$= \; N_u [D\,\xi(t)] + N_y [N\,\xi(t)] - \Delta\eta(t) = \text{(de (1.1.a) e (1.1.b) } \Rightarrow)$$
$$= \; N_u u(t) + N_y y(t) - \Delta\eta(t) = \qquad \text{(de (3.1.a) } \Rightarrow)$$
$$= 0$$

Logo, como e(t) obedece à eq. $\Delta(\boldsymbol{p})e(t) = 0$ e temos a condição (iii) satisfeita, segue-se que $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ como queríamos mostrar.

Suponha agora o sistema (1.1) em malha fechada com os sistema (3.1). A descrição polinomial do sistema em malha fechada possuirá um vetor de estado parcial $\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}$, uma entrada $v(t)$ e uma saída $y(t)$. Tal descrição polinomial será obtida das equações :

$$D(\boldsymbol{p})\,\xi(t) = I_m\, u(t)$$
$$y = N(\boldsymbol{p})\,\xi(t)$$
$$\Delta(\boldsymbol{p})\eta(t) = N_u(\boldsymbol{p})\,u(t) + N_y(\boldsymbol{p})\,y(t)$$
$$u(t) = v(t) - \eta(t)$$

Após algumas manipulações algébricas muito simples, teremos :

$$\begin{bmatrix} D & I_m \\ -N_y N & (\Delta + N_u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ N_u \end{bmatrix} v(t) \tag{3.5.a}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \tag{3.5.b}$$

Note que o vetor de estado parcial $\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}$ não é uma boa escolha. Uma escolha muito melhor seria o vetor de estado parcial $\begin{bmatrix} \xi(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$, onde e(t) é o vetor *erro de observação* definido na eq. (3.4). A relação entre estes dois vetores é biunívoca, pois eles estão podem ser obtidos um do outro pela multiplicação por uma matriz unimodular :

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ M(\boldsymbol{p}) & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \tag{3.6.a}$$

ou equivalentemente

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ M(p) - I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \tag{3.6.b}$$

Substituindo-se (3.6.b) em (3.5) teremos

$$\begin{bmatrix} D+M & -I_m \\ -N_y N + \Delta M + N_u M & -\Delta + N_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ N_u \end{bmatrix} v(t) \tag{3.7.a}$$

$$y(t) = [\ N \quad 0\ ] \begin{bmatrix} \xi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \tag{3.7.b}$$

Substituindo-se as equações

$$M = P - D \qquad \text{(vide seção 1)}$$

e

$$\Delta M = N_u D + N_y N \tag{3.3}$$

em (3.7) teremos

$$\begin{bmatrix} P & -I_m \\ N_u P & -\Delta + N_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ N_u \end{bmatrix} v(t) \tag{3.8.a}$$

$$y(t) = [\ N \quad 0\ ] \begin{bmatrix} \xi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \tag{3.8.b}$$

E multiplicando-se à esquerda ambos os lados de (3.8.a) pela matriz unimodular

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ N_u & -I_m \end{bmatrix}$$

teremos

$$\begin{bmatrix} P & -I_m \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \tag{3.9.a}$$

$$y(t) = [\ N \quad 0\ ]\begin{bmatrix} \xi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \tag{3.9.b}$$

Da fórmula de inversão de matrizes bloco triangulares (vide eq. (5.12) do cap. 12) é fácil ver que a matriz de transferência do sistema em malha fechada será :

$$\bar{G}(s) = N(s)\,P^{-1}(s)$$

Se P(s) for escolhida satisfazendo a condição :

(iv) det(P(s)) possui como raízes os pólos desejados $\{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n\}$, e ainda P(s) primo entre si com relação a N(s), teremos que os pólos de $\bar{G}(s)$ são os pólos desejados $\{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n\}$.

É claro também que os pólos do sistema completo em malha fechada são as raízes de det(P(s)) e de det(Δ(s)). Isto é uma consequência imediata da eq. (3.9.a) e das propriedades do determinantes com relação às matrizes bloco-triangulares.

Resumindo, nosso problema agora recaiu em um problema algébrico :

Problema 3.1 : *Encontrar P, N_u, N_y e Δ satisfazendo (i), (ii), (iii), (iv).*

4. SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3.1

Nesta seção aplicaremos grande parte da teoria desenvolvida nos cap.3 e 4 para solucionar o problema algébrico proposto no final da seção precedente.

Lembremos que N(s), D(s) é uma DMFd irredutível de G(s) *com D(s) de coluna reduzida.* Suponhamos agora que A(s), B(s) é uma DMFe irredutível de G(s), isto é, $G(s) = A(s)^{-1}B(s)$ e A, B são primas à esquerda. Do fato de

$$G = A^{-1}B = N\,D^{-1}$$

vemos que

$$B\,D = A\,N \tag{4.1.a}$$

Note também da equação (2.1) multiplicada à esquerda em ambos os lados por $\Delta\,M$ que :

$$(\Delta MX)\,N + (\Delta MY)\,D = \Delta\,M \tag{4.1.b}$$

Logo, de (4.1.a) e (4.2.b), podemos escrever a equação matricial

$$\begin{bmatrix} \Delta MY & \Delta MX \\ B & -A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta M \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

A idéia agora é fazermos operações elementares de linha em ambos os lados de (4.2) de maneira a obter :

$$\begin{bmatrix} N_u & N_y \\ B & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta M \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

com $\Delta^{-1}N_u$ e $\Delta^{-1}N_y$ sejam estritamente próprios, sendo que a eq. (3.3) será obedecida.

Pelo teorema da divisão (teorema 6.1 do Cap.4) sabemos que existem matrizes L (fazendo o papel do Q) e N_y (fazendo o papel do R) tais que :

$$\Delta MX = LA + N_y \tag{4.4}$$

onde N_yA^{-1} é estritamente próprio. Pela proposição 5.1 do Cap.4, teremos obrigatoriamente que toda coluna de N_y possuirá grau estritamente menor do que a coluna correspondente de A. Seja

$$k = \max_{i,j}\{\text{grau } a_{ij}\}$$

onde $a_{ij} = \{A\}_{ij}$. Escolheremos Δ como uma matriz diagonal de polinômios *Hurwitz* δ_i onde o grau de todos os δ_i $(i = 1, ..., m)$ são iguais a k. Por construção Δ é de linha reduzida (por ser diagonal) e o grau de cada linha de N_y é estritamente menor do que o grau da linha correspondente de Δ. Pelo resultado dual à proposição 5.6 do Cap.4, vemos que $\Delta^{-1}N_y$ é estritamente própria.

Seja V a matriz unimodular

$$V = \begin{bmatrix} I_m & L \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

multiplicando à esquerda a eq. matricial (4.2) em ambos os lados por V, vemos de (4.4) que uma equação na forma (4.3) é obtida, onde

$$N_u = \Delta MY + LB \tag{4.5}$$

Resta mostrar agora que $\Delta^{-1}N_u$ é pelo menos uma matriz racional própria. Para isso, ***uma hipótese sobre a escolha da matriz* P(s) *será necessária.*** Escolheremos $P = D + M$ como uma matriz de coluna reduzida com o mesmo grau de coluna de D. Assim valerá o seguinte resultado :

Lemma 4.1 : Sejam D(s), P(s) matrizes (m,m) polinomiais não singulares de coluna reduzida *possuindo o mesmo grau de coluna (isto é, cada coluna de D possui o mesmo grau da coluna correspondente de P). Então*

$$\lim_{s \to \infty} D(s)\, P(s)^{-1} = K$$

onde K é uma matriz não singular de constantes reais.

Prova : Pelo teorema 5.4 do Cap. 4, vemos que $D P^{-1}$ e $P D^{-1}$ são matrizes racionais próprias. Portanto existem os limites

$$\lim_{s \to \infty} D(s)\, P(s)^{-1} = K_1$$
$$\lim_{s \to \infty} P(s)\, D(s)^{-1} = K_2$$

Da teoria de limites sabemos que, se dois limites existem, então o limite do produto é o produto dos limites. Assim :

$$\begin{aligned} \lim_{s \to \infty} (D P^{-1})(P D^{-1}) = I_m &= \\ &= [\lim_{s \to \infty} D(s)\, P(s)^{-1}].[\lim_{s \to \infty} P(s)\, D(s)^{-1}] = \\ &= K_1 K_2 \end{aligned}$$

Portanto $K_1 K_2 = I_m$ e assim ambos os limites existem e um é o inverso do outro. □

Como $M = P - D$, podemos reescrever a equação (3.8) como sendo

$$N_u D + N_y N = \Delta(P - D)$$

Logo

$$N_u D + \Delta D + N_y N = \Delta P$$

assim, multiplicando-se a equação anterior à direita por P^{-1} e à esquerda por Δ^{-1} teremos

$$(\Delta^{-1} N_u)\, D P^{-1} + D P^{-1} + (\Delta^{-1} N_y)\, (N P^{-1}) = I_m$$

ou seja

$$\Delta^{-1} N_u = [I_m - (\Delta^{-1} N_y)\, (N P^{-1}) - D P^{-1}]\, P D^{-1} \tag{4.6}$$

Agora note que

(i) $(\Delta^{-1} N_y)$ é estritamente própria por construção ;

(ii) $(N P^{-1})$ é próprio porque N possui grau de coluna menor ou igual ao grau de coluna de D (pois $G = N D^{-1}$) sendo que D possui o mesmo grau de coluna que P.

(iii) $D\, P^{-1}$ e $P D^{-1}$ são matrizes racionais próprias pelo lema anterior.

Portanto, de (4.6) e (i), (ii), (iii) vemos que $\Delta^{-1} N_u$ é própria como queríamos mostrar.