Capítulo 4 - Matrizes de Funções Racionais

Neste capítulo estudaremos as matrizes de funções racionais. A importância desse estudo na teoria de controle linear se deve principalmente ao fato de que as matrizes de transferência de sistemas lineares invariantes no tempo são matrizes deste tipo.

Uma das dificuldades na teoria de controle multivariável é o entendimento do significado dos zeros e pólos. Através da forma de Smith-MacMillan é possível fornecer uma definição coerente de pólos e zeros para sistemas multivariáveis.

Lembremos do capítulo 3 a definição de matriz racional :

Definição : Uma matriz $Q(s)$ (l,m) (l linhas e m colunas) cujos elementos $q_{ij}(s) = a_{ij}(s)/b_{ij}(s)$ são funções racionais na variável s (isto é, $a_{ij}(s), b_{ij}(s)$ são polinômios em s com $b_{ij}(s)$ polinômio não nulo) é dita matriz racional em s.

1. Forma de Smith-MacMillan

Seja G(s) uma matriz (l,m) de funções racionais. Seja $g_{ij}(s) = p_{ij}(s)/q_{ij}(s)$ o elemento de $G(s)$ da i-ésima linha e j-ésima coluna. Seja $d(s)$ o mínimo múltiplo comum (m.m.c) de todos os denominadores $q_{ij}(s)$ com $(i = 1, \ldots, m)$ e $(j = 1, \ldots, l)$. Note que para todo q_{ij} com $(i = 1, \ldots, m)$ e $(j = 1, \ldots, l)$ existe um polinômio $\bar{d}_{ij}$ tal que

$$d(s) = \bar{d}_{ij}(s)\, q_{ij}(s) \tag{1.1}$$

Seja $N(s)$ a matriz polinomial (l,m) onde cada elemento $n_{ij}(s)$ é obtido por :

$$n_{ij}(s) = g_{ij}(s)\, d(s) = (p_{ij}(s)/q_{ij}(s))\; d(s)$$

E de (1.1) vemos que

$$n_{ij}(s) = \bar{d}_{ij}(s)\, p_{ij}(s)$$

Escrevemos então de maneira única

$$G(s) = N(s)/d(s) \tag{1.2}$$

e dizemos que $d(s)$ é o polinômio denominador de $G(s)$ e $N(s)$ é a matriz numerador de $G(s)$.

Seja $\Lambda(s)$ a forma de Smith de $N(s)$ (vide Cap. 3) e sejam $L(s)$ e $S(s)$ matrizes polinomiais unimodulares tais que

$$\Lambda = S\, N\, L \tag{1.3.a}$$

onde

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s) & 0^{r \times (m-r)} \\ 0^{(l-r) \times r} & 0^{(l-r) \times (m-r)} \end{bmatrix} \tag{1.3.b}$$

e

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{bmatrix} \tag{1.3.c}$$

Seja a matriz racional M(s) definida por :

$$M(s) = S\,G(s)\,L = S\,\frac{N(s)}{d(s)}\,L = \frac{\Lambda(s)}{d(s)} \tag{1.4.a}$$

Então, de (4.3) vemos que

$$M(s) = \begin{bmatrix} \Delta(s) & 0^{r \times (m-r)} \\ 0^{(l-r) \times r} & 0^{(l-r) \times (m-r)} \end{bmatrix} \tag{1.4.b}$$

onde

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} \epsilon_1/\phi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon_2/\phi_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon_r/\phi_r \end{bmatrix} \tag{1.4.c}$$

$$\epsilon_i(s)/\phi_i(s) = \lambda_i(s)/d(s) \tag{1.4.d}$$

Para obtermos unicidade na matrix M(s), vamos supor que cancelamos os fatores comuns de ϵ_i/ϕ_i para $(i = 1, \ldots, r)$. Assim ϵ_i e ϕ_i são polinômios únicos e primos entre si. Do fato de λ_i dividir λ_{i+1} segue-se que ***ϵ_i divide ϵ_{i+1} e ainda ϕ_i é divisível por ϕ_{i+1} para $(i = 1, \ldots, r)$.*** (prove esta última afirmação com exercício)

Definição 1.1 : A matriz M(s) obtida segundo o procedimento acima é denominada forma de Smith Macmillan de G(s). O *grau de Macmillan* de G(s), denotado por $\nu[G(s)]$, é a soma dos graus dos denominadores da forma de Smith-Macmillan, isto é, $\nu[G(s)] = \sum_{i=1}^{r} \text{grau}(\phi_i)$.

Pode-se mostrar (vide Cap. 10) que o grau de Smith-MacMillan é o menor número possível de integradores necessários para construção de uma realização de $G(s)$.

2. Descrição Matricial Fracionária

Seja G(s) uma matriz racional (l, m). A seguinte definição matricial corresponde a generalização do fato de definirmos uma função racional como razão de polinômios.

Definição 2.1 : Seja $G(s)$ uma matriz racional (l,m). Seja $\{N_e, D_e\}$ um par de matrizes polinomiais com D_e não singular (det D_e é um polinômio não nulo), com N_e (l,m) e D_e (l,l). Então $\{N_e, D_e\}$ é dita ser uma *Descrição Matricial Fracionária à esquerda (DMFe)* se $G(s) = D_e(s)^{-1}N_e(s)$. Analogamente, seja $\{N_d, D_d\}$ um par de matrizes polinomiais com D_d não singular, com N_d (l,m) e D_d (m,m). Então $\{N_d, D_d\}$ é dita ser uma *Descrição Matricial Fracionária à direita (DMFd)* se $G(s) = N_d(s)\,D_d(s)^{-1}$.

Note que, como o produto de matrizes não é comutativo no caso geral, há a necessidade de especificarmos se a multiplicação é feita pelo lado esquerdo ou direito.

Agora vamos mostrar que toda matriz $G(s)$ racional possui uma DMFd e uma DMFe gerada a partir da eq. (1.1). De fato, suponha $G(s) = N(s)/d(s)$ obtida de maneira única como na equação (1.1). Sejam

$$D_e = d(s)\,I_l = \begin{bmatrix} d(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d(s) \end{bmatrix} \quad \text{(matriz } (l,l)\text{)}$$

$$D_d = d(s)\,I_m = \begin{bmatrix} d(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d(s) \end{bmatrix} \quad \text{(matriz } (m,m)\text{)}$$

Então é fácil ver que

$$G(s) = D_e(s)^{-1}N(s) \tag{2.1}$$

$$G(s) = N(s)\,D_l(s)^{-1} \tag{2.2}$$

E as equações (2.5) e (2.6) definem respectivamente uma DMFe e uma DMFd de $G(s)$.

Para o caso de funções racionais $q(s) = a(s)/b(s)$ podemos sempre cancelar os fatores comuns de $a(s)$ e $b(s)$, ou em outras palavras, podemos sempre obter $a(s)$ e $b(s)$ primos entre si tais que $q(s) = a(s)/b(s)$. Para uma DMFe (DMFd) veremos que tal idéia pode ser generalizada utilizando-se o conceito de matrizes primas à esquerda (direita). De fato, suponha que $\{N_e, D_e\}$ é uma DMFe de $G(s)$, mas que N_e e D_e não são primos entre si. Então, dos resultados da seção 3 do cap.3, existe uma matriz polinomial $\bar{R}$ (l,l), não singular tal que $\bar{R}$ não é unimodular e

$$N_e = \bar{R}\bar{N}_e$$

$$D_e = \bar{R}\bar{D}_e$$

Logo

$$\begin{aligned} G(s) &= D_e^{-1}N_e \\ &= (\bar{R}\bar{D}_e)^{-1}(\bar{R}\bar{N}_e) \\ &= \bar{D}_e^{-1}\bar{R}^{-1}\bar{R}\bar{N}_e = \bar{D}_e^{-1}\bar{N}_e \end{aligned}$$

Assim, devido ao cancelamento do fator comum $\bar{R}$, podemos dizer $\{\bar{N}_e, \bar{D}_e\}$ é uma DMFe "mais simples" de $G(s)$.

Definição 2.2 : Seja $G(s)$ uma matriz racional (l,m). Seja $\{N_e, D_e\}$ uma DMFe de $G(s)$. Então $\{N_e, D_e\}$ é dita ser uma ***DMFe irredutível*** se N_e e D_e forem primas à esquerda. Analogamente, seja $\{N_d, D_d\}$ uma DMFd de $G(s)$. Então $\{N_d, D_d\}$ é dita ser uma ***DMFd irredutível*** se N_d e D_d são primas à direita.

O seguinte método de encontrarmos uma DMFe ou uma DMFd irredutível é uma consequência imediata dos resultados do capítulo 3 :

Método 1 : Obtenha uma DMFe (2.5) a partir da eq. (1.1). Obtenha o MDCe $\bar{R}$ de N_e e D_e. Então $\bar{N}_e = \bar{R}^{-1}N_e$ e $\bar{D}_e = \bar{R}^{-1}D_e$ formam uma DMFe irredutível. (idem para DMFd trocando-se "e" por "d" e fazendo-se $\bar{N}_d = N_d\bar{R}^{-1}$ e $\bar{D}_d = D_d\bar{R}^{-1}$)

3. DMF's Irredutíveis

Nesta seção apresentaremos alguma propriedades das DMF's irredutíveis. Todas as deduções serão feitas para DMFd's. Para obter as versões a esquerda o leitor deve substituir "direita" por "esquerda" e trocar a ordem de multiplicação das matrizes em lugares convenientes. Como exercício, o leitor deve reescrever a seção para DMFe's.

Proposição 3.1 : Suponha que $\{N_1, D_1\}$ e $\{N_2, D_2\}$ são duas DMFd's irredutíveis. Então existe U polinomial unimodular tal que

$$D_1 = D_2 U$$
$$N_1 = N_2 U$$

Em outras palavras, DMFd's diferem entre si por matrizes unimodulares à direita.

Prova : Temos

$$N_1 D_1^{-1} = N_2 D_2^{-1} = G(s)$$

Multiplicando-se a última equação à direita por D_1 teremos

$$N_1 = N_2 D_2^{-1} D_1$$

Seja $U = D_2^{-1} D_1$. Segue-se que $D_1 = D_2 U$. Portanto resta mostrar que U é polinomial e unimodular. Para isso mostraremos que U^{-1} é polinomial. De fato, como N_1, D_1 são primas à direita, pelo teorema 3.9 do cap. 3, temos que existem matrizes X_1, Y_1 polinomiais tais

$$X_1 N_1 + Y_1 D_1 = I_m$$

Logo

$$X_1 N_2 D_2^{-1} D_1 + Y_1 D_2 D_2^{-1} D_1 = I_m$$

Assim

$$(X_1 N_2 + Y_1 D_2) D_2^{-1} D_1 = I_m$$

Portanto $U^{-1} = (X_1 N_2 + Y_1 D_2)$ e assim U^{-1} é polinomial. Por raciocínio análogo a partir de N_2 e D_2 podemos mostrar que $U = (X_2 N_1 + Y_2 D_1)$ sendo U portanto polinomial. □

Proposição 3.2 : Se $\{N, D\}$ é uma DMFd qualquer de $G(s)$ e $\{\bar{N}, \bar{D}\}$ é uma DMFd irredutível, então existe R polinomial (que será unimodular somente se $\{N, D\}$ também for irredutível) tal que

$$N = \bar{N} R$$
$$D = \bar{D} R$$

Prova : Pela proposição anterior só precisamos considerar o caso onde $\{N, D\}$ não é uma DMFd irredutível. Se N, D não são matrizes primas à direita, seja R_1 um MDCD de N e D. Teremos

$$N = N_1 R_1$$
$$D = D_1 R_1$$

e N_1 , D_1 são primas à direita. Segue-se que $\{N_1, D_1\}$ é uma DMFd irredutível de $G(s)$. Pela proposição anterior existe U unimodular tal que $N_1 = \bar{N} U$ e $D_1 = \bar{D} U$. Logo podemos tomar $R = U R_1$. De fato, note que

$$N = N_1 R_1 = \bar{N} U R_1$$
$$D = D_1 R_1 = \bar{D} U D_1$$

□

O seguinte resultado é uma consequência direta das proposições anteriores, e sua demontração é deixada como exercício.

Corolário 3.3 : $\{N, D\}$ é uma DMF irredutível de uma matriz raciona $G(s)$ se e somente se o grau do polinômio $\det(D)$ for o mínimo possível. Em particular, para todas as DMFd's de $G(s)$ o polinômio $\det(D)$ possui o mesmo grau.

A demonstração do resultado a seguir é muito importante de ser compreendida porque ela estabelece uma segunda técnica de se obter DMFd's irredutíveis, dessa vez a paratir da forma de Smith-MacMillan.

Proposição 3.4 : $\{N, D\}$ é uma DMFd irredutível de uma matriz racional $G(s)$ se e somente se $\text{grau}[\det(D(s))] = \nu[G(s)]$ (grau de Smith-MacMillan de $G(s)$).

Prova : Seja M a forma de Smith-Macmillan de $G(s)$ e sejam $L(s), S(s)$ matrizes polinomiais unimodulares unimodulares tais que

$$G = L M S \tag{3.1}$$

onde

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} \xi_1/\epsilon_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \xi_r/\epsilon_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

Se definirmos

$$N_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} \xi_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_r & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

$$D_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} \epsilon_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon_r & \\ \hline & & 0 & & I_{m-r} \end{array}\right]$$

teremos então (note que D_1 foi completada com I_{m-r} para tornar-se uma matriz quadrada inversível)

$$M = N_1 D_1^{-1}$$

e portanto vemos que devido ao fato de $\xi_i(s)$ e $\epsilon_i(s)$ serem polinômios primos entre si para $i = 1, \ldots, r$, eles não se anulam simultaneamente para nenhum valor de s complexo. Segue-se que a matriz polinomial $T(s)$ dada por

$$T(s) = \begin{bmatrix} N_1(s) \\ D_1(s) \end{bmatrix}$$

possui posto pleno para todo $s \in \mathbb{C}$. Portanto $\{N_1, D_1\}$ é uma DMFd irredutível de M de grau igual ao grau de MacMillan de $G(s)$. Fazendo-se

$$\bar{N}(s) = L\, N_1 \tag{3.2.a}$$

$$\bar{D}(s) = S^{-1} D_1 \tag{3.2.b}$$

Provemos que $\{\bar{N}, \bar{D}\}$ é uma DMFd irredutível de $G(s)$. Note inicialmente de (3.1) que $G = \bar{N}\bar{D}^{-1}$. Resta mostrar que $\bar{N}$, $\bar{D}$ são primas à direita. Para mostrar tal fato, vamos mostrar que todo divisor comum à direita de $\bar{N}$ e $\bar{D}$ é unimodular. Suponha que R é um divisor comnum à direita, isto é

$$\bar{N} = \bar{\bar{N}}\, R$$
$$\bar{D} = \bar{\bar{D}}\, R$$

logo, de (3.2) vemos que

$$N_1 = L^{-1}\bar{N} = (L^{-1}\bar{\bar{N}})\, R$$
$$D_1 = S\bar{D} = (S\bar{\bar{D}})\, R$$

Logo R é um divisor à direita de N_1 e D_1. Segue-se do fato de N_1 e D_1 serem primos à direita que R é uma matriz unimodular. Logo $\{\bar{N}, \bar{D}\}$ é uma DMFd irredutível de G e grau$[\det(D(s))] = \nu[G(s)]$. Pelo corolário anterior, todas as DMFd de $G(s)$ terão esta propriedade se e somente se forem irredutíveis. □

Proposição 3.5 : Seja $\{N, D\}$ uma DMFd irredutível de uma matriz racional $G(s)$. Então todos os Numeradores $N(s)$ possuem a mesma forma de Smith. (Idem para os Denominadores $D(s)$)

Prova : Como na demonstração do resultado anterior, construa a DMFd irredutível $\{\bar{N}, \bar{D}\}$. Se $\{N, D\}$ é outra DMF irredutível, note da proposição 3.1 que existe uma matriz U unimodular tal que

$$\bar{N} = N\, U$$
$$\bar{D} = D\, U$$

Assim, de (3.2) teremos

$$N_1 = L^{-1} N U$$

$$D_1 = S D U$$

Logo tais matrizes diferem por produtos de matrizes unimodulares a esquerda e à direita e portanto possuem a mesma forma de Smith. Em particular as formas de Smith de N e de D são respectivamente dadas pelas matrizes N_1 e D_1 da demonstração da prop. 3.4

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE : Dada uma matriz racional $G(s)$ encarada como uma matriz de transferência de um sistema linear, podemos sempre obter uma descrição polinomial em que não haja zeros desacoplados da entrada nem da saída. Para isso, seja $\{N, D\}$ uma DMFd irredutível de G. Então

$$D(p)\xi(t) = I\, u(t)$$

$$y = N(p)\,\xi(t)$$

é uma descrição polinomial de um sistema cuja função de transferência é $G(s)$. Note que tal descrição polinomial não possui zeros desacoplados da saída porque o par de matrizes N, D é primo à direita. Por outro lado não há zeros desacoplados daentrada porque o par I, D é primo à esquerda. Como exercício mostre que uma descrição polinomial baseada em uma DMFe irredutível $\bar{N}$, $\bar{D}$ possui propriedades análogas. Para isso construa a descrição polinomial

$$\bar{D}(p)\xi(t) = \bar{N}(p)\, u(t)$$

$$y = I\,\xi$$

e mostre que ela não possui zeros desacoplados à direita nem à esquerda.

4. Pólos e Zeros

Nesta seção introduziremos a definição de pólos e zeros de matrizes de transferência de sistemas multivariáveis. Tais definições são coerentes com os resultados teóricos relativos aos sistemas multivariáveis e generalizam os conceitos de pólos e zeros de sistemas SISO (single input-single output).

Seja $M(s)$ a forma de Smith-MacMillan de $G(s)$ dada por

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} \xi_1/\epsilon_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \xi_r/\epsilon_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

Seja $\mu(s) = \xi_1(s)\xi_2(s)...\xi(s)$ (produto dos numeradores invariantes) e $\pi(s) = \epsilon_1(s)\epsilon_2(s)...\epsilon_r(s)$ (produto dos denominadores invariantes). O polinômio $\pi(s)$, por coerência com a definição a seguir, será denominado polinômio característico de G(s) e o polinômio $\mu(s)$ será denominado numerador característico de G(s).

Definição 4.1 : Os pólos de uma matriz racional G(s) são as raízes de seu polinômio característico $\pi(s)$. Os zeros de G(s) são as raízes de seu numerador característico $\mu(s)$.

Do que foi visto na seção anterior (vide proposição demonstração da prop 3.4 e prop 3.5) vemos que, dada qualquer DMFd irredutível $\{N, D\}$ de G(s), os pólos de G(s) serão as raízes de det(D(s)) e os zeros serão as raízes do produto dos polinômios da forma de Smith de N(s).

5. DMF's Próprias

Sabemos que para uma função de transferência G(s) ser realizável na forma de um sistema linear invariante no tempo, é preciso que G(s) seja uma matriz racional própria. Esta seção examinará o importante caso especial das DMF's relativas às matrizes racionai próprias.

Definição 5.1 : Dada uma matriz (l,m) polinomial N(s), dizemos que ***o grau da j-ésima coluna*** é o maior grau entre os polinômios desta coluna, ou seja, o maior grau da lista de polinômios $n_{1j}(s), \dots, n_{lj}(s)$. Analogamente pode-se definir o grau de uma linha de N(s).

Proposição 5.2 : Se G(s) é uma matriz racional (estritamente) própria e $G(s) = N(s)D(s)^{-1}$ onde N(s) e D(s) são matrizes polinomiais, então toda coluna de N(s) possui grau (estritamente) menor do que a correspondente coluna de D.

Prova : Temos

$$N = G\,D$$

Para os elementos $n_{ij}(s)$ da j-ésima coluna de N podemos escrever

$$n_{ij} = \sum_k g_{ik} d_{kj} \tag{5.1}$$

Note que g_{ik} é uma razão de polinômios α_{ik}/β_{ik} onde o grau de α_{ik} é (estritamente menor) menor ou igual que o grau de β_{ik}. Assim, de (5.1), multiplicando e dividindo pelo produto de todos os denominadores resulta que

$$n_{ij} = \sum_k \left[\frac{\alpha_{ik}(\prod_p \beta_{ip}) d_{kj}}{\beta_{ik}(\prod_p \beta_{ip})} \right] \tag{5.2}$$

Note agora que a razão $\gamma_{ik}(s) = (\prod_p \beta_{ip}) / \beta_{ik}$ é polinomial, sendo que

$$\text{grau}(\gamma_{ik}) = \Big(\sum_p \text{grau}(\beta_{ip}) \Big) - \text{grau}(\beta_{ik}) \tag{5.3}$$

Logo podemos reescrever (5.2) como sendo

$$n_{ij} = \frac{\sum_k \alpha_{ik} \gamma_{ik} d_{kj}}{\prod_p \beta_{ip}} \tag{5.4}$$

Assim, de (5.4) e do fato do grau da soma de polinômios ser menor ou igual ao maior grau dentre tais polinômios, vemos que o grau de n_{ij} não pode ser superior ao máximo entre os valores

$$\Big(\text{grau}(\alpha_{ik} \gamma_{ik} d_{kj}) - \sum_p \text{grau}(\beta_{ip})\Big)$$

para o k variando entre os valores possíveis. Mas note de (5.3) e do fato do grau de α_{ik} ser (estritamente menor) menor ou igual que o grau de β_{ik}, que

$$\Big(\text{grau}(\alpha_{ik} \gamma_{ik} d_{kj}) - \sum_p \text{grau}(\beta_{ip})\Big) = \text{grau}(d_{kj}) + \text{grau}(\gamma_{ik}) + \text{grau}(\alpha_{ik}) - \sum_p \text{grau}(\beta_{ip}) =$$
$$= \text{grau}(d_{kj}) + \text{grau}(\alpha_{ik}) - \text{grau}(\beta_{ik}) \le \text{grau}(d_{kj})$$

Isso demonstra o fato pretendido. □

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE : A recíproca da proposição anterior não é em geral verdadeira. Em outras palavras podemos ter grau de coluna de N estritamente menor que o grau de coluna correspondente em D e termos $N D^{-1}$ não própria. Exemplo :

$$N = \begin{bmatrix} 2s^2+1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} s^3+s & s \\ s^2+s+1 & s \end{bmatrix}$$

$$N D^{-1} = \begin{bmatrix} -s^2+s & s^3+s+1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+s-1}$$

Note que $G = N D^{-1}$ não é própria !

Para conseguirmos uma recíproca da proposição anterior precisamos de mais uma hipótese sobre a matriz D. Tal hipótese se baseia no conceito de redução de coluna (ou de linha), que apresentaremos a seguir. Antes disso, vamos lembrar que o determinante de uma matriz quadrada de m linhas e colunas D é o somatório de produtos de elementos de D na forma :

$$\det D = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma)\, d_{\sigma(1)1} d_{\sigma(2)2} \cdots d_{\sigma(m)m}$$

onde o somatório é tomado em todas as $m!$ permutações σ do conjunto $\mathbb{M} = \{1, 2, \ldots, m\}$. Note que uma permutação pode ser considerada uma bijeção $\sigma : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{M}$. Por exemplo, para $m = 3$, a permutação (2, 1, 3) pode ser considerada como a bijeção $\sigma : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{M}$ tal que $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$ e $\sigma(3) = 3$. No somatório acima, para cada permutação σ fixada, cada elemento $d_{\sigma(i)i}$ denota o elemento de D da linha $\sigma(i)$ e da coluna i. Assim, se $D(s)$ é uma matriz polinomial é fácil ver que

$$\mathrm{grau}(\det D(s)) \leq \sum_{i=1}^{m} k_i \tag{5.5}$$

onde k_i é grau da i-ésima coluna de $D(s)$. Quando a igualdade na desigualdade (5.5) é satisfeita, dizemos que D é de ***coluna reduzida***. Por exemplo considere a matriz

$$D(s) = \begin{bmatrix} s^3 + s & s + 2 \\ s^2 + s + 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^3 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & 2 \\ s^2 + s + 1 & 1 \end{bmatrix}$$

onde separamos os termos de grau máximo. Note que a soma dos graus de coluna é $k_1 + k_2 = 4$. No entanto o grau do det D(s) é apenas 2. A razão disso é que a matriz dos coeficientes de maior grau de coluna, neste exemplo dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é singular. Em geral podemos sempre escrever

$$D(s) = D_{hc} S(s) + L(s)$$

onde D_{hc} é a matriz de coeficientes de maior grau numa coluna e

$$S(s) = \mathrm{diag}(s^{k_1}, s^{k_2}, \ldots, s^{k_m})$$

onde k_i é o grau da i-ésima coluna de D(s) para $i = 1, \ldots, m$. Note que o grau da i-ésima coluna de L(s) é estritamente menor que k_i. Então, é fácil ver que

$$\det D(s) = (\det D_{hc})\, s^{\Sigma k_i} + \textit{termos de grau inferior}$$

Logo, *uma matriz não singular D(s) é de coluna reduzida se e só se D_{hc} for não singular.*

Proposição 5.3 : Uma matriz D(s) não singular pode tornar-se *coluna reduzida* por operacões elementares de coluna.

Não forneceremos uma prova formal desta proposição. A idéia é baixar os graus dos polinomios de uma coluna que estão artificialmente altos. Vide páginas 384-385 do Kailath(Linear Systems).

Teorema 5.4 : Se D(s) é polinomial não singular de coluna reduzida e N(s) é polinomial, então $G = N D^{-1}$ é (estritamente) própria se e somente se cada coluna de N possuir grau (estritamente) menor que cada coluna de D.

Demonstração : Faremos a prova no caso *estritamente próprio.* O leitor não terá dificuldade em adaptar a prova para o caso *próprio.*

Pela proposição 5.2 temos que $G = N D^{-1}$ estritamente própria implica que toda coluna de de N possui grau estritamente menor cada coluna correspondente de D, mostrando a suficiência. Para mostrar a necessidade note que temos

$$G D = N$$

ou seja, se $g_i(s)$ e $n_i(s)$ denotam respectivamente a *i*-ésima linha de G(s) e N(s), segue-se que

$$g_i(s)\, D(s) = n_i(s)$$

Assim, pela regra de Cramer

$$g_{ij}(s) = \frac{\det D_{ij}(s)}{\det\ D(s)}$$

onde D_{ij} é a matriz obtida trocando-se a *j*-ésima linha de D pela *i*-ésima linha (n_i) de N.

Mas

$$D(s) = D_{hc} S(s) + L(s)$$

Analogamente

$$D_{ij}(s) = D_{ij_{hc}} S(s) + L_{ij}(s)$$

Note que $D_{ij}(s)$ difere de D(s) apenas na *j*-ésima linha. Seja δ_k o grau da *k*-ésima coluna de D e $\bar{\delta}_k$ o grau da k-ésima coluna de D_{ij}. Ao substituírmos um elemento d_{jk} por um elemento n_{jk}, podem ocorrer as seguintes possibilidades :

(i) *O elemento jk de D_{hc} é nulo:* Neste caso o grau de coluna não é alterado ($\delta_k = \bar{\delta}_k$). De fato, pois D_{hc} é não singular e portanto existe pelo menos 1 elemento com grau maior que que o do elemento n_{jk} (por hipótese o grau de cada coluna de N é menor que o de D). Logo o elemento jk de $D_{ij_{hc}}$ é obrigatoriamente nulo.

(ii) *O elemento jk de D_{hc} é não nulo. Neste caso teremos que examinar dois subcasos:*

(ii.a) *Não há nenhum outro elemento não nulo de D_{hc} na coluna k:* Assim o grau desta coluna $\bar{\delta}_k < \delta_k$.

(ii.b) *Há outro elemento não nulo de D_{hc} na coluna k:* Neste caso n_{jk} tem grau menor que este outro elemento correspondente de D na coluna k e portanto o elemento jk de $D_{ij_{hc}}$ é obrigatoriamente nulo. Neste caso o grau de coluna $\bar{\delta}_k = \delta_k$.

Note que o caso (ii.a) ou (ii.b) ocorre pelo menos 1 vez já que D_{hc} é não singular e portanto na linha j há pelo menos 1 elemento não nulo.

Suponha que para linha j só ocorra os casos (i) e (ii.b). Neste caso os graus de coluna de D e D_{ij} seriam iguais mas a linha j de $D_{ij_{hc}}$ seria nula e portanto det $D_{ij_{hc}}$ seria nulo. Portanto grau(Det D) seria maior que grau(Det D_{ij}). Por outro lado, se ocorrer pelo menos uma vez o caso (ii.a) na linha j, como o grau de uma coluna baixou e os outros casos não alteram o grau de coluna, segue-se que

$$\text{grau det } D_{ij} \leq \sum_k \bar{\delta}_k < \sum_k \delta_k = \text{grau det D}$$

Logo

$$g_{ij}(s) = \frac{\det D_{ij}(s)}{\det D(s)}$$

é estritamente próprio como queríamos mostrar. □

6. Teorema da Divisão

Nesta seção generalizaremos o algorítimo de divisão de polinômios para matrizes polinomiais. Para entendermos o significado deste teorema note que, se n(s) e d(s) são dois polinômios então podemos sempre escrever, com auxílio do algorítmo de divisão de polinômios :

$$n(s) = q(s)\, d(s) + r(s)$$

onde q(s) e r(s) são polinômios únicos com grau de r(s) estritamente menor que o grau de d(s), isto é,

$r(s)/d(s)$ é uma função racional estritamente própria. A generalização matricial do mesmo resultado é quase idêntica, tomando-se o cuidado que produtos de matrizes não comutam e portanto existem duas versões do mesmo teorema, a primeira relativa à expressão $N = QD + R$ com RD^{-1} estritamente próprio e a segunda relativa à expressão $N = DQ + R$ com $D^{-1}R$ estritamente própria. Daremos apenas uma delas, deixando ao leitor como exercício a obtenção da outra.

Teorema 6.1 (Da Divisão) : Sejam $N(s)$ matriz polinomial (l,m) e $D(s)$ matriz polinomial não sngular (m,m). Então existe um único par de matrizes (l,m) polinomiais $Q(s)$ e $R(s)$ com $R(s)D^{-1}(s)$ estritamente própria.

Demonstração : Seja a matriz racional $G(s) = ND^{-1}$. Decomponha, como na seção 6 do Cap. 1, a matriz G como uma soma :

$$G = G_0 + Q$$

onde G_0 é uma matriz racional estritamente própria e Q é uma matriz polinomial.

Agora note que

$$\begin{aligned} N &= GD \\ &= (G_0 + Q)D \\ &= G_0D + QD \end{aligned}$$

Note que G_0D é polinomial porque $G_0D = N - QD$. Seja $R = G_0D$. Então teremos $RD^{-1} = G_0$ e ainda $N = QD + R$, mostrando a existência de Q e R.

Para mostrar a unicidade, suponha que Q, R e Q_1, R_1 são pares de matrizes obedecendo o enunciado do teorema. Então

$$N = QD + R = Q_1D + R_1$$

Logo teremos $QD + R = Q_1D + R_1$ e assim

$$(Q - Q_1)D + (R - R_1) = 0$$

Multiplicando por D^{-1} à direita em ambos os lados da última equação e usando-se o fato de que a matriz $M = (R - R_1)D^{-1}$ é estritamente própria, notamos que

$$(Q - Q_1) = -M$$

logo ambas as matrizas M e $(Q - Q_1)$ são nulas pois este é o único caso em que uma matriz polinomial pode ser igual a uma matriz estritamente própria. Assim $R = R_1$ e $Q = Q_1$. □