

Cap. 4 - Formas Canônicas e Teoria da Realização

Visão geral do capítulo

Dada uma matriz de transferência $G(s)$, uma realização de $G(s)$ é um sistema linear:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1b)$$

$$x(t_0) = x_0, t \leq t_0 \quad (1c)$$

tal que a sua matriz de transferência coincida com $G(s)$. Tal problema é evidentemente um problema de síntese, sendo motivado pelos problemas de implementação de filtros e sistemas de controle analógicos. A teoria que estuda os problemas de realização é denominada de *Teoria da Realização*.

Neste capítulo estudaremos as *formas canônicas controlável e observável* de sistemas monovariáveis, isto é, sistemas com apenas uma entrada e uma saída¹. Tais formas canônicas permitem resolver de forma simples o problema de realização para sistemas monovariáveis.

Intimamente ligado com o problema da realização, está a *Decomposição de Kalman*. Tal decomposição exhibe as partes de um sistema que são: a) *não-observável e controlável*; b) *observável e controlável*; c) *não observável e não controlável*; d) *observável e não-controlável*. Mostraremos, a partir da decomposição de Kalman, que somente a parte *observável e controlável* contribui para a matriz de transferência do sistema e que uma realização é *minimal* (isto é, possui a dimensão do espaço de estados mínima) se e somente se a realização é controlável e observável.

Apresentaremos um método de síntese de uma realização minimal de uma matriz de transferência $G(s)$ baseado na realização coluna a coluna de tal matriz. Tal método utiliza a forma canônica controlável e gera uma realização controlável de $G(s)$. Para obter uma realização minimal deve-se extrair a parte observável da realização.

O algoritmo dual (realização por linhas a partir da forma canônica-observável) será brevemente discutido.

1 Formas canônicas

Nesta seção apresentaremos algumas formas canônicas de sistemas monovariáveis. Tais formas canônicas permitem resolver de maneira simples o problema de realização de tal classe de sistemas.

¹Sistemas “SISO” (single input, single output).

1.1 Forma canônica controlável

Suponhamos que queremos fornecer uma realização para a função de transferência:

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \quad (2)$$

Multiplicando-se e dividindo-se o denominador e o numerador de $g(s)$ por $1/s^3$ teremos:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1/s + b_2/s^2 + b_3/s^3}{1 + a_1/s + a_2/s^2 + a_3/s^3} \quad (3)$$

Seja $\xi^{(3)}(s)$ uma variável auxiliar definida pela equação:

$$\frac{\xi^{(3)}(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + a_1/s + a_2/s^2 + a_3/s^3} \quad (4)$$

Segue-se que

$$Y(s) = (b_1/s + b_2/s^2 + b_3/s^3)\xi^{(3)}(s)$$

Denotando-se

$$\xi^{(2)}(s) = (1/s)\xi^{(3)}(s) \quad (5a)$$

$$\xi^{(1)}(s) = (1/s^2)\xi^{(3)}(s) \quad (5b)$$

$$\xi^{(0)}(s) = (1/s^3)\xi^{(3)}(s) \quad (5c)$$

segue-se que

$$Y(s) = b_1 \xi^{(2)}(s) + b_2 \xi^{(1)}(s) + b_3 \xi^{(0)}(s) \quad (6)$$

Por outro lado, de (4), podemos escrever

$$(1 + a_1/s + a_2/s^2 + a_3/s^3)\xi^{(3)}(s) = U(s)$$

Portanto

$$\xi^{(3)}(s) = -(a_1/s)\xi^{(3)}(s) - (a_2/s^2)\xi^{(3)}(s) - (a_3/s^3)\xi^{(3)}(s) + U(s)$$

Usando-se (5), vem:

$$\xi^{(3)}(s) = -a_1 \xi^{(2)}(s) - a_2 \xi^{(1)}(s) - a_3 \xi^{(0)}(s) + U(s) \quad (7)$$

Podemos representar as equações (7), (6), (5) através do seguinte diagrama:

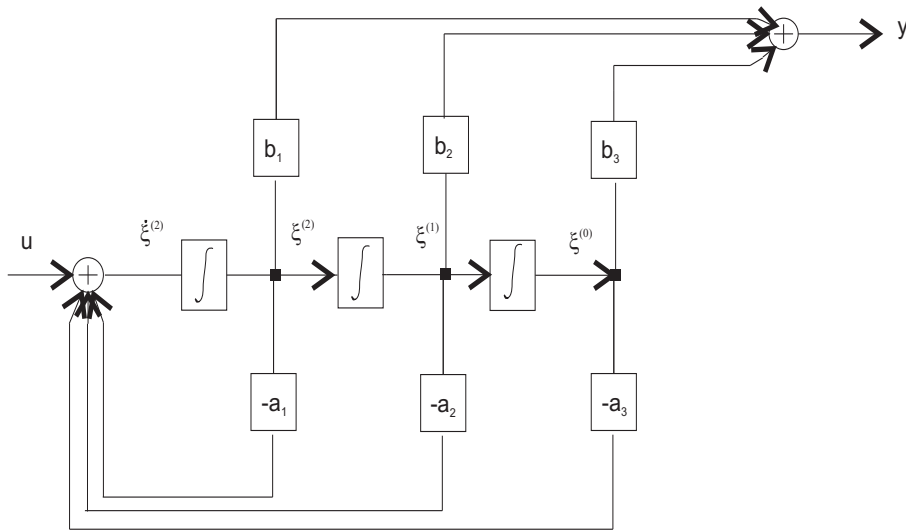


Figura 1: Forma canônica controlável (terceira ordem).

Tal diagrama é facilmente convertido na seguinte equação diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}^{(0)}(t) \\ \dot{\xi}^{(1)}(t) \\ \dot{\xi}^{(2)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^{(0)}(t) \\ \xi^{(1)}(t) \\ \xi^{(2)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (8a)$$

$$y = [b_3 \quad b_2 \quad b_1] \begin{bmatrix} \xi^{(0)}(t) \\ \xi^{(1)}(t) \\ \xi^{(2)}(t) \end{bmatrix} \quad (8b)$$

É fácil mostrar que tal sistema é sempre controlável porque a matriz de controlabilidade é sempre da forma:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & z \\ 1 & x & y \end{bmatrix}$$

Observação : A forma canônica controlável também é importante para o problema de imposição de pólos como veremos no capítulo 5.

O leitor não terá dificuldade em generalizar essas idéias para sistemas de ordem diferente de 3. Em geral a forma canônica controlável correspondente à função de transferência

$$g(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}^{(0)} \\ \dot{\xi}^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{\xi}^{(n-2)} \\ \dot{\xi}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^{(0)} \\ \xi^{(1)} \\ \vdots \\ \xi^{(n-2)} \\ \xi^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (9a)$$

$$y = [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_2 \ b_1] \begin{bmatrix} \xi^{(0)} \\ \xi^{(1)} \\ \vdots \\ \xi^{(n-2)} \\ \xi^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (9b)$$

◇

1.2 Forma canônica observável

Consideramos novamente o problema de fornecer uma realização para a função de transferência (2). Seja $Y(s) = \xi(s)$. Reescrevendo a equação (3), teremos

$$(1 + a_1/s + a_2/s^2 + a_3/s^3)\xi(s) = (b_1/s + b_2/s^2 + b_3/s^3)U(s)$$

e portanto:

$$\xi(s) = -(a_1/s)\xi(s) - (a_2/s^2)\xi(s) - (a_3/s^3)\xi(s) + (b_1/s)U(s) + (b_2/s^2)U(s) + (b_3/s^3)U(s) \quad (10)$$

Note que a equação (10) corresponde ao diagrama da figura 2.

Do diagrama da figura 2, segue-se que podemos definir:

$$\begin{aligned} x_1 &= y = \xi \\ \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_1 + b_2 u \\ \dot{x}_3 &= -a_3 x_1 + b_3 u \end{aligned}$$

dando origem à seguinte realização:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u(t) \quad (11a)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (11b)$$

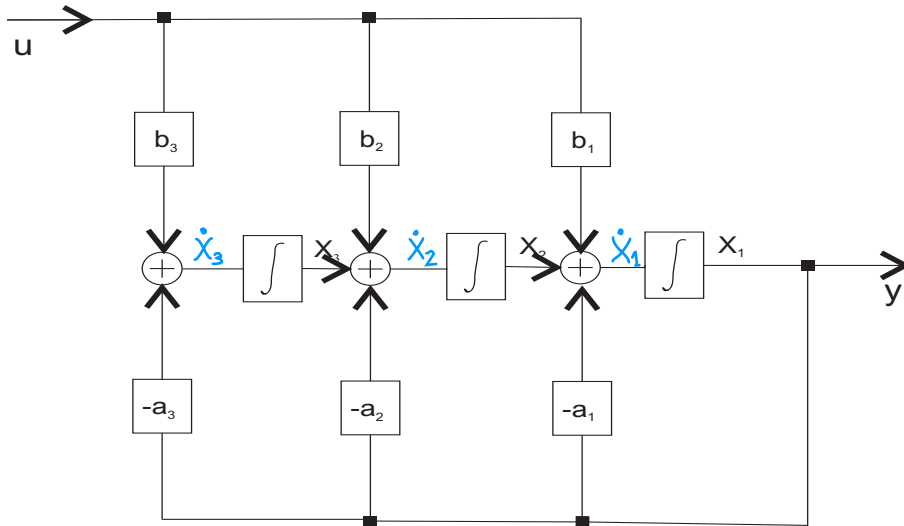


Figura 2: Forma canônica observável (terceira ordem).

Observação : Tal realização é sempre observável (exercício). A mesma idéia pode ser usada para sintetizar a realização de funções de transferência de ordem diferente de 3. Em geral a forma canônica observável correspondente à função de transferência

$$g(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u \quad (12a)$$

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (12b)$$

◇

1.3 Realizações monovariáveis não estritamente próprias

No caso em que $g(s) = n(s)/d(s)$ é própria, mas não é estritamente própria, devemos fazer a divisão $n(s) = Dd(s) + r(s)$, sendo D o quociente (necessariamente de grau zero)

e $r(s)$, o polinômio resto, necessariamente de grau menor que o grau de $d(s)$. Assim podemos escrever:

$$n(s)/d(s) = (Dd(s) + r(s))/d(s) = D + r(s)/d(s).$$

Note que $r(s)/d(s)$ é estritamente próprio e portanto pode ser realizado em uma forma canônica das seções anteriores. Se (A, B, C) é uma realização de $r(s)/d(s)$ então (A, B, C, D) será uma realização de $g(s)$ (mostre).

Exemplo : Seja $g(s) = (ds+h)/(s-a)$. Note que $g(s) = d+g_1(s)$ onde $g_1(s) = b/(s-a)$, onde $b = (h + da)$. Note também que:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [a]x + [b]u \\ y &= [1]x \end{aligned}$$

é uma realização de $g_1(s) = b/(s - a)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [a]x + [b]u \\ y &= [1]x + [d]u \end{aligned}$$

é uma realização de $g(s)$. ♣

Exemplo : Seja $g(s) = d + (b_1s + b_2)/(s^2 + a_1s + a_2)$. Note que o sistema:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [b_2 \quad b_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + du \end{aligned}$$

é uma realização de $g(s)$. ♣

1.4 Outras formas canônicas

Outras formas canônicas (de controlabilidade e de observabilidade) podem ser encontradas no livro Linear Systems, de autoria de T. Kailath, pp. 35-53.

1.5 Realização em cascata

Note que toda função de transferência

$$g(s) = \frac{b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n}$$

pode ser escrita da forma:

$$\prod_{i=1}^k g_i(s)$$

onde os g_i são funções de transferência próprias e tem no máximo ordem 2 (mostre). Assim a função de transferência $g(s)$ pode ser realizada como um sistema em cascata a partir dos $g_i(s)$. A vantagem dessas realizações é que podemos colocar primeiro os termos relativos aos polos de baixa frequência (filtros passa-baixa). Isso pode ser útil para evitar saturações internas por ampliações devido a ruído.

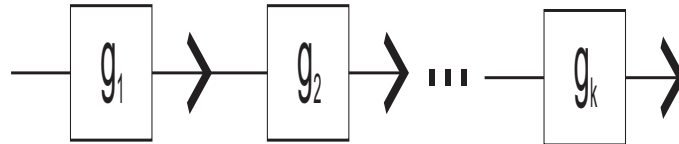


Figura 3: Realização em cascata.

1.6 Realização em paralelo

Decompondo $g(s)$ como uma soma de frações parciais $g(s) = \sum_{i=1}^k g_i(s)$ podemos realizar a função de transferência através da conexão em paralelo dos $g_i(s)$ através da figura abaixo 4. Isso pode ser útil para realização de funções de transferência através de

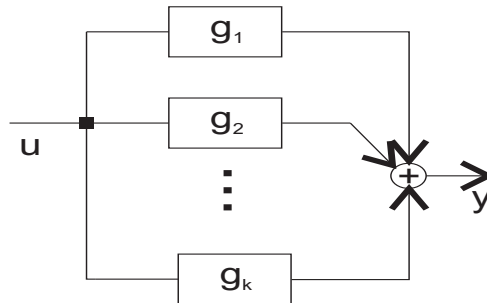


Figura 4: Realização em paralelo.

amplificadores operacionais, que possuem esquemas padrão para primeira e segunda ordens.

2 Decomposição de Kalman e realizações mínimas

Nesta seção estudaremos a decomposição de Kalman e a sua relação com as realizações mínimas. Mostraremos que uma realização é minimal se e somente se ela é controlável e observável.

2.1 Decomposição de Kalman

Considere o sistema linear

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (13a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (13b)$$

$$x(t_0) = x_0, t \leq t_0 \quad (13c)$$

onde $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$, $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $D : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ são transformações lineares, \mathcal{X} , \mathcal{U} e \mathcal{Y} são espaços vetoriais de dimensão n , m , l , respectivamente.

Sabemos do capítulos 2 e 3 que podemos determinar os subespaços \mathcal{R}_0 e \mathcal{N}_0 , denominados respectivamente por *subespaço controlável* e *subespaço não-observável*. Temos que ambos são subespaços A -invariantes, $\text{Im } B \subset \mathcal{R}_0$ e $\mathcal{N}_0 \subset \ker C$.

É fácil mostrar que $\mathcal{R}_0 \cap \mathcal{N}_0$ e $\mathcal{R}_0 + \mathcal{N}_0$ também são A -invariantes. Note que :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 \cap \mathcal{N}_0 &\subset \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}_0 + \mathcal{N}_0 \subset \mathcal{X} \\ \mathcal{R}_0 \cap \mathcal{N}_0 &\subset \mathcal{N}_0 \subset \mathcal{R}_0 + \mathcal{N}_0 \subset \mathcal{X} \end{aligned}$$

Seja $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ uma base de $\mathcal{R}_0 \cap \mathcal{N}_0$. Pelo teorema de completamento de base (vide capítulo 1) é possível construir uma base de \mathcal{R}_0 da forma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \rho_1, \dots, \rho_s\}$ onde $\{\rho_1, \dots, \rho_s\}$ é um subconjunto de uma base de \mathcal{R}_0 . Como $\mathcal{R}_0 \cap \mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_0$, analogamente é possível construir uma base de \mathcal{N}_0 da forma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \eta_1, \dots, \eta_p\}$ onde $\{\eta_1, \dots, \eta_p\}$ é um subconjunto de uma base de \mathcal{N}_0 . Não é difícil mostrar que o conjunto $\mathbb{S} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \rho_1, \dots, \rho_s, \eta_1, \dots, \eta_p\}$ é uma base de $\mathcal{R}_0 + \mathcal{N}_0$ (exercício). Agora complete \mathbb{S} até uma base de \mathcal{X} , obtendo uma base $\mathbb{B} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k, \rho_1, \dots, \rho_s, \eta_1, \dots, \eta_p, x_1, \dots, x_r\}$. Defina os seguintes subespaços:

$$\mathcal{X}_1 = \text{span} \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \text{ (Estados não-observáveis e controláveis)} \quad (14)$$

$$\mathcal{X}_2 = \text{span} \{\rho_1, \dots, \rho_s\} \text{ (Estados observáveis e controláveis)} \quad (15)$$

$$\mathcal{X}_3 = \text{span} \{\eta_1, \dots, \eta_p\} \text{ (Estados não-observáveis e não-controláveis)} \quad (16)$$

$$\mathcal{X}_4 = \text{span} \{x_1, \dots, x_r\} \text{ (Estados observáveis e não-controláveis)} \quad (17)$$

Teorema 1 (*Teorema da decomposição de Kalman*) *Escrevendo o sistema (A, B, C, D) na base \mathbb{B} de \mathcal{X} teremos a seguinte forma canônica $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$, denominada Decomposição de Kalman:*

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} & \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} & \tilde{D} &= D \end{aligned}$$

onde o par

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

é controlável (parte controlável do sistema), e o par

$$\begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \quad (19)$$

é observável (parte observável do sistema).

Prova: Apresentaremos apenas as idéias principais da prova.

Os zeros matriciais que estão abaixo de A_{11} são consequência do fato de $\mathcal{X}_1 = \mathcal{R}_0 \cap \mathcal{N}_0$ ser A -invariante. Os quatro zeros matriciais abaixo da submatriz $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ são consequência do fato de $\mathcal{R}_0 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$ ser A -invariante. A forma de \tilde{B} é consequência de $\text{Im } B \subset \mathcal{R}_0 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$. Como $\mathcal{R}_0 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$, segue-se que (18) é a parte controlável do sistema.

Os três zeros matriciais da última linha de \tilde{A} decorrem da A -invariância de $\mathcal{R}_0 + \mathcal{N}_0 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3$. Levando-se em conta a A -invariância de $\mathcal{N}_0 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_3$, é fácil mostrar que a submatriz 2,3 de \tilde{A} (da segunda linha e terceira coluna) tem que ser nula. Os dois zeros matriz \tilde{C} são justificados pelo fato de $\mathcal{N}_0 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_3 \subset \ker C$. Como $\mathcal{N}_0 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_3$, segue-se que (19) é a parte observável do sistema. \square

Proposição 1 *A matriz de transferência $G(s)$ do sistema depende somente da parte $(A_{22}, B_2, C_2, \tilde{D})$, isto é, da parte controlável e observável do sistema.*

Prova: Sabemos que $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}$. Note que²

$$\begin{aligned} & C(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \\ & = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_{11}) & -A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ 0 & (sI - A_{22}) & 0 & -A_{24} \\ 0 & 0 & (sI - A_{33}) & -A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & (sI - A_{44}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_{11})^{-1} & X & X & X \\ 0 & (sI - A_{22})^{-1} & X & X \\ 0 & 0 & (sI - A_{33})^{-1} & X \\ 0 & 0 & 0 & (sI - A_{44})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & = C_2(sI - A_{22})^{-1}B_2 \end{aligned}$$

Assim, $G(s) = C_2(sI - A_{22})^{-1}B_2 + \tilde{D}$, que só depende da parte observável e controlável do sistema. \square

A decomposição de Kalman leva à estrutura do sistema da figura 5.

2.2 Realização de ordem mínima

Dizemos que (A, B, C, D) é uma realização minimal de uma matriz de transferência $G(s)$ própria se $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ e a realização possuir a mínima ordem possível,

²A matrix X denota uma matriz qualquer cujos valores numéricos, ou mesmo as suas dimensões, não são importantes para o cálculo que estamos realizando no momento.

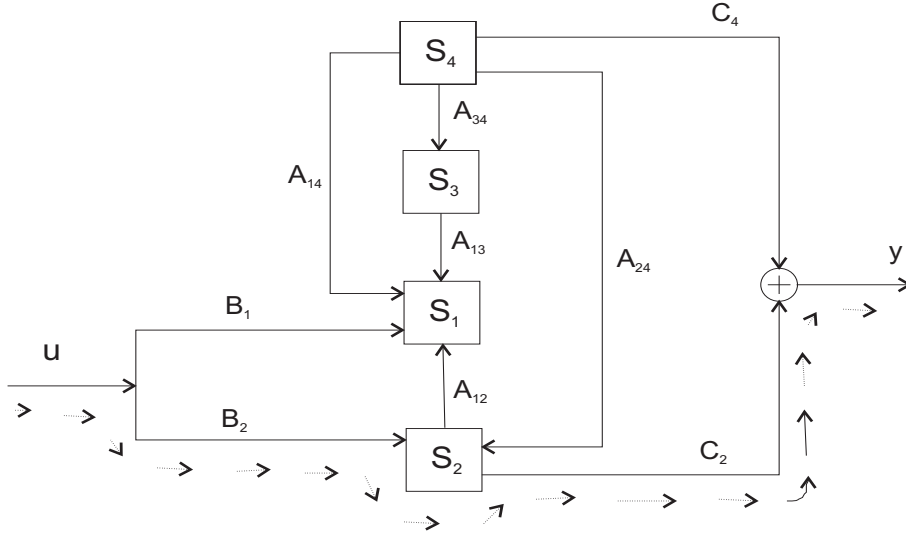


Figura 5: Diagrama de conexões do teorema de decomposição de Kalman. O caminho de setas indica a única ligação entre a entrada e a saída, que é a parte controlável e observável.

isto é, $\dim \mathcal{X} = n$ é a menor dimensão do espaço de estados dentre todas as realizações possíveis.

Antes de estudar as realizações minimais, será útil introduzir os números (matrizes) de Markov:

Definição 1 Seja $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ a matriz de transferência de um sistema linear. Os números (matrizes) de Markov associados a esta função de transferência são dados por:

$$M_{-1} = D$$

$$M_k = CA^k B, k \in \mathbb{N}$$

Note que $(sI - A)^{-1} = \mathcal{L}(e^{At}) = \mathcal{L}[\sum_{k \in \mathbb{N}} (At)^k / k!] = \sum_{k \in \mathbb{N}} A^k / s^{k+1}$. Em particular:

$$G(s) = D + \sum_{k \in \mathbb{N}} CA^k B / s^{k+1} = \sum_{k > -1} M_k / s^{k+1}$$

Note que as matrizes de Markov determinam completamente a matriz de transferência. Note também que se $g(t) = Ce^{At}B + D = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$, então $M_k = g^{(k)}(t)|_{t=0}$.

Para demonstrar o resultado principal desta seção precisamos do seguinte resultado auxiliar de álgebra-linear:

Lema 1 Sejam $\mathcal{O} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{V}$ e $\mathcal{C} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{X}$ transformações lineares. Então:

(i) O posto da composição de transformações é menor ou igual ao mínimo dos postos. O posto de \mathcal{OC} é menor ou igual que $\min\{p_1, p_2\}$ onde p_1, p_2 são os postos de \mathcal{O} e \mathcal{C} , respectivamente.

(ii) Se \mathcal{O} é injetiva, isto é, se $\ker \mathcal{O} = \{0\}$, então o posto de \mathcal{OC} coincide com o posto de \mathcal{C} .

Prova: Exercício. □

Agora podemos enunciar o resultado principal da seção:

Teorema 2 *Uma realização (A, B, C, D) de $G(s)$ é minimal se e somente se (A, B) for controlável e (C, A) for observável.*

Prova: A necessidade decorre da decomposição de Kalman. De fato, se a realização for não-observável ou for não-controlável, a parte observável e controlável desta realização é também uma realização de $G(s)$, mas com ordem inferior à realização dada.

Para mostrar a suficiência, suponha que (A, B, C, D) é uma realização de $G(s)$ com ordem n tal que (C, A) é observável, e (A, B) é controlável. Suponha por absurdo que a realização (A, B, C, D) não é minimal. Em outras palavras, existe uma realização $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ de $G(s)$ de ordem \hat{n} menor que n . Como as matrizes de transferência dos sistemas acima coincidem com $G(s)$, segue-se que as matrizes de Markov também coincidem, ou seja:

$$CA^k B = \hat{C} \hat{A}^k \hat{B}$$

Denotando as matrizes de observabilidade e controlabilidade de (A, B, C, D) por \mathcal{O} e \mathcal{C} , defina:

$$M = \mathcal{O}\mathcal{C} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & CA^nB \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \dots & CA^{2(n-1)}B \end{bmatrix}$$

Analogamente, seja

$$\hat{M} = \hat{\mathcal{O}}\hat{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \hat{C}\hat{B} & \hat{C}\hat{A}\hat{B} & \dots & \hat{C}\hat{A}^{n-1}\hat{B} \\ \hat{C}\hat{A}\hat{B} & \hat{C}\hat{A}^2\hat{B} & \dots & \hat{C}\hat{A}^n\hat{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1}\hat{B} & \hat{C}\hat{A}^n\hat{B} & \dots & \hat{C}\hat{A}^{2(n-1)}\hat{B} \end{bmatrix}$$

Segue-se que $M = \hat{M}$. Como o (C, A) é observável, segue-se que $\ker \mathcal{O} = \{0\}$. Como (A, B) é controlável, então o posto de \mathcal{C} é igual a n . Portanto, pela parte (ii) do Lema 1, segue-se que o posto de M é igual a n . Por outro lado, como \hat{n} é menor que n e o posto de $\hat{\mathcal{O}}$ e de $\hat{\mathcal{C}}$ são limitados superiormente por \hat{n} , segue-se que da parte (i) do lema 1 que o posto de \hat{M} é menor ou igual a \hat{n} . Isto é uma contradição, terminando a demonstração. □

3 Teoria da Realização

Dada uma matriz racional própria $G(s)$, nesta seção vamos mostrar uma técnica de síntese de uma realização (A, B, C, D) controlável para $G(s)$. Uma realização minimal pode ser obtida a partir da parte observável desta realização. As idéias da técnica de síntese dual são também discutidas.

3.1 O algoritmo de realização por colunas

Seja $G(s)$ uma matriz de transferência própria $l \times m$. Considere o seguinte método de obtenção de uma realização minimal (A, B, C, D) de $G(s)$.

1. Obtenha uma realização controlável (A_j, B_j, C_j, D_j) para j -ésima coluna de $G(s)$ (a ser descrita em detalhes).
2. Construa o sistema $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix} & \tilde{B} &= \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_m \end{pmatrix} \\ \tilde{C} &= \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_m \end{pmatrix} & \tilde{D} &= \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Extraia a parte observável (A, B, C, D) de $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$.

Obs : Escrevendo o sistema numa base adequada, obtemos as matrizes

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \tilde{D}.$$

Faça $A = A_{22}, C = C_2, B = B_2$ e $D = \tilde{D}$.

Pode-se mostrar o seguinte resultado³:

Teorema 3 *O sistema (A, B, C, D) é uma realização minimal de $G(s)$.*

3.2 Realização de cada coluna

Fixado j entre 1 e m , considere que $g_j(s) = (g_{1j}(s), \dots, g_{mj}(s))^T$ é a j -ésima coluna de $G(s)$. Mostraremos agora como obter a realização (A_j, B_j, C_j, D_j) de g_j .

Seja $g_{ij} = p_{ij}(s)/q_{ij}(s)$. Seja $d_j(s)$ o denominador comum da coluna j , isto é, o denominador comum dos g_{ij} para $i = 1, \dots, l$. Multiplicando-se o numerador e o denominador de g_{ij} por um polinômio adequado, podemos sempre escrever (após fazer uma divisão conforme descrito na subseção 1.3):

$$g_{ij} = n_{ij}(s)/d_i(s) + d_{ij}$$

onde d_{ij} é uma constante e $n_{ij}(s)/d_i(s)$ é estritamente próprio. Seja:

$$\begin{aligned} d_j(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n \\ n_{ij} &= b_{i,1} s^{n-1} + \dots + b_{i,n}, \quad i = 1, \dots, l \end{aligned}$$

³Na verdade, as únicas dificuldades técnicas para demonstrar este resultado são: (i) garantir que (\tilde{A}, \tilde{B}) é controlável (fácil por computação direta da matriz de controlabilidade), e (ii) garantir que a parte observável de um sistema controlável é controlável (resultado mais ou menos imediato a partir do critério de controlabilidade de Hautus).

Assim, podemos fornecer uma realização (controlável) para coluna $g_j(s)$ dada por (mostrar que tal sistema é mesmo uma realização):

$$\begin{aligned}
 A_j &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} & B_j &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 C_j &= \begin{bmatrix} b_{1,n} & b_{1,n-1} & \dots & b_{1,2} & b_{1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{l,n} & b_{l,n-1} & \dots & b_{l,2} & b_{l,1} \end{bmatrix} & D_j &= \begin{bmatrix} d_{1,j} \\ \vdots \\ d_{l,j} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3.3 O algoritmo de realização por linhas

Transpondo a matriz $G(s)$ podemos fornecer uma realização (A_1, B_1, C_1, D_1) de $G(s)^T$ usando a mesma metodologia acima. Depois podemos determinar uma realização de (A, B, C, D) de $G(s)$ através do sistema dual $A = A_1^T, B = C_1^T, C = B_1^T, D = D_1^T$.

Uma outra abordagem (exercício) seria realizar as linhas de $G(s)$ diretamente através de realizações observáveis, agregá-las de maneira dual ao que foi feito no algoritmo de realização por colunas e depois extrair a parte controlável.

Cap. 5 - Estabilização Por Realimentação de Estado

Visão Geral do Capítulo

Neste capítulo definiremos o conceito de “realimentação de estado”. Mostraremos que o espaço controlável é um invariante por realimentação de estado, isto é, não depende da realimentação escolhida. Mais ainda, a controlabilidade de um sistema é equivalente à possibilidade de imposição livre de pólos através de realimentação de estado.

Quando um sistema não for controlável, mostraremos que é possível impor pólos apenas na parte controlável do sistema. A parte não controlável possui um espectro fixo, que não sofre alteração com a realimentação.

Apresentaremos o conceito de estabilizabilidade, isto é, a capacidade de estabilizar um sistema via realimentação de estado. Mostraremos que um sistema é estabilizável se e só se a parte não controlável for estável.

1 Realimentação de Estado

Como os conceitos tratados neste capítulo são do tipo “entrada \mapsto estado”, consideraremos um sistema (sem saída) da forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1a)$$

$$x(t_0) = x_0, t \leq t_0 \quad (1b)$$

onde $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ são transformações lineares, \mathcal{X} e \mathcal{U} são espaços vetoriais de dimensão n e m respectivamente.

Ao longo dos capítulos seguintes, denotaremos por $\sigma(A)$ o espectro de uma matriz quadrada (conjunto dos autovalores ou pólos de A).

Definição 1 *Seja um sistema na forma (1). Uma realimentação (linear) de estado é uma lei de controle*

$$u(t) = Fx(t) + v(t) \quad (2)$$

onde $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ é uma transformação linear, e $v(t)$ é a nova entrada externa pertencente ao conjunto de entradas admissíveis (vide sec. 1 do cap. 2). O sistema obtido pela aplicação da entrada (2) no sistema (1) é chamado de sistema em malha fechada, sendo dado por :

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + Bv(t) \quad (3)$$

A ação de uma realimentação de estado é representada no diagrama a seguir:

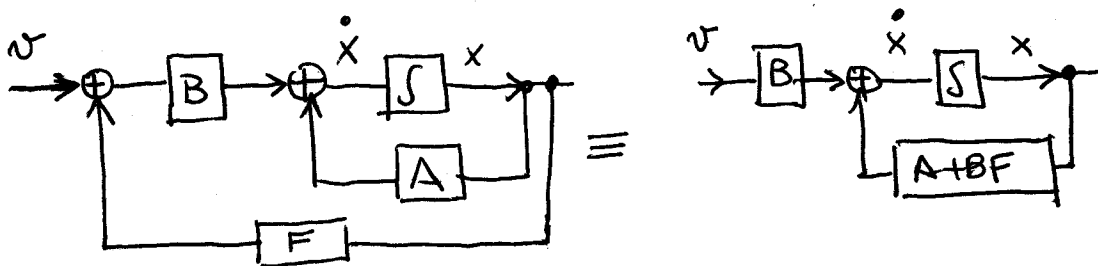


Figura 1: Realimentação de Estado

A proposição seguinte mostra que o subespaço controlável \mathcal{R}_0 (vide Cap. 2) é um invariante por realimentação de estado.

Proposição 1 *O subespaço \mathcal{R}_0 é invariante por realimentação de estado. Em outras palavras, uma realimentação de estado não altera o espaço controlável.*

Prova: Vide apêndice. □

Observação : Fica implícito no enunciado da proposição acima que o espaço alcançável \mathcal{R}_0 é $(A + BF)$ -invariante para qualquer realimentação de estado F . ◇

2 Imposição de pólos

Nesta seção mostraremos a conexão entre o conceito de controlabilidade e a possibilidade de impor pólos livremente por realimentação de estados. Mostraremos tal fato de maneira construtiva, **com um algoritmo de demonstração que não é adequado para o projeto**, pelo menos na maioria dos casos.

Provaremos inicialmente o resultado principal desta seção para sistemas com uma entrada apenas. Após isso, generalizaremos o resultado para sistemas de várias entradas.

Teorema 1 *Um sistema (A, b) com uma entrada é controlável se e somente se os pólos de $A + bf$ puderem ser livremente impostos para uma escolha adequada da realimentação de estado f .*

Prova: Mostraremos apenas que a controlabilidade implica na imposição livre de pólos (mostraremos que a imposição livre de pólos implica em controlabilidade somente na

demonstração do teorema 2, que examina o caso de várias entradas). Para isso, seja

$$\pi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n - (a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0).$$

Defina recursivamente a seqüência de polinômios $\pi^{(0)}(\lambda), \pi^{(1)}(\lambda), \dots, \pi^{(n)}(\lambda)$, tais que:

$$\pi^{(0)}(\lambda) = \pi^{(0)}(\lambda) \quad (4a)$$

$$\lambda\pi^{(i)}(\lambda) = \pi^{(i-1)}(\lambda) + a_{i-1}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4b)$$

Assim é fácil ver que

$$\pi^{(1)}(\lambda) = \lambda^{n-1} - (a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda + a_1) \quad (5a)$$

$$\pi^{(2)}(\lambda) = \lambda^{n-2} - (a_{n-1}\lambda^{n-3} + \dots + a_3\lambda + a_2) \quad (5b)$$

...

$$\pi^{(i)}(\lambda) = \lambda^{n-i} - (a_{n-1}\lambda^{n-i-1} + \dots + a_{i+1}\lambda + a_i) \quad (5c)$$

...

$$\pi^{(n-1)}(\lambda) = (\lambda - a_{n-1}) \quad (5d)$$

$$\pi^{(n)}(\lambda) = 1 \quad (5e)$$

Agora defina a seqüência de vetores e_0, e_1, \dots, e_n , por:

$$e_i = \pi^{(i)}(A)b, \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (6)$$

onde, tal como no teorema de Cayley-Hamilton, definimos $\pi^{(i)}(A) = A^{n-i} - (a_{n-1}A^{n-i-1} + \dots + a_{i+1}A + a_i\mathbf{I})$. De (5e) segue-se que

$$e_n = b \quad (7a)$$

De (4b), teremos:

$$A\pi^{(i)}(A) = \pi^{(i-1)}(A) + a_{i-1}I$$

Aplicando-se ambos os lados da equação anterior (que é uma igualdade de transformações lineares) no vetor $e_n = b$, e usando-se (6), teremos:

$$Ae_i = e_{i-1} + a_{i-1}Ie_n, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (7b)$$

Do teorema de Cayley-Hamilton, temos que $e_0 = 0$ já que $\pi^{(0)}$ é o polinômio característico de A e assim $\pi^{(0)}(A) = 0$. Note que podemos contruir o conjunto de vetores $\mathbb{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ em ordem decrescente a partir de (7a), pois de (7b) e (7a) segue-se que:

$$e_{i-1} = Ae_i - a_{i-1}b, \quad (i = n, n-1, \dots, 2) \quad (8)$$

Como (A, b) é controlável, segue-se que $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$ é uma base do espaço de estados \mathcal{X} . De (8) é fácil provar que $\mathbb{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ é também uma base de \mathcal{X}

(para isso prove por indução que $\text{span}\{b, Ab, \dots, A^k b\} = \text{span}\{e_n, e_{n-1}, \dots, e_{n-k+1}\}$).
Escrevendo o par (A, b) na base \mathbb{B} teremos:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9a)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= T^{-1}AT \\ \tilde{b} &= T^{-1}b \end{aligned}$$

onde T é a matriz dos vetores coluna $\{e_1, \dots, e_n\}$. Note que a expressão da i -ésima coluna de \tilde{A} é consequência de (8) (e do fato que $e_0 = 0$ para a primeira coluna). A expressão de \tilde{b} é consequência do fato de $e_n = b$.

Agora suponha que desejamos impor novos pólos $\{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n\}$. Para isso é necessário que o polinômio característico em malha fechada seja:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(\lambda) &= (\lambda - \hat{\lambda}_1)(\lambda - \hat{\lambda}_2) \dots (\lambda - \hat{\lambda}_n) \\ &= \lambda^n - (\hat{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \hat{a}_1\lambda + \hat{a}_0). \end{aligned}$$

Defina a matriz de realimentação \tilde{f} , pondo

$$\tilde{f} = [(\hat{a}_0 - a_0) \quad (\hat{a}_1 - a_1) \quad \dots \quad (\hat{a}_{n-1} - a_{n-1})]$$

É fácil mostrar que:

$$\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{f} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hat{a}_0 & \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \dots & \hat{a}_{n-1} \end{bmatrix}$$

e portanto os pólos de $(\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{f})$ são os pólos desejados. Como os pólos de uma transformação linear não dependem de mudança de base (ou matricialmente, os autovalores de uma matriz não se alteram por transformação de similaridade), teremos:

$$\begin{aligned} \sigma(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{f}) &= \sigma\left(T(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{f})T^{-1}\right) \\ &= \sigma\left(T\tilde{A}T^{-1} + T\tilde{B}\tilde{f}T^{-1}\right) \\ &= \sigma\left(A + b \underbrace{\tilde{f}T^{-1}}_f\right) \end{aligned}$$

Assim a realimentação de estado a ser implementada será:

$$f = \tilde{f}T^{-1} \quad (10)$$

E isto completa a demonstração. \square

O teorema 1 pode ser generalizado para sistemas com várias entradas. Para isso necessitaremos do lema a seguir, que reduz o problema multivariável a um problema com apenas uma entrada. A idéia é mostrar que existe uma realimentação de estado \hat{F} e um vetor de ganhos $\hat{u} \in \mathcal{U}$ tal que a lei de controle:

$$u(t) = Fx(t) + \hat{u}v(t)$$

produz um sistema em malha fechada controlável com a nova entrada externa **escalar** $v(t)$ dado por:

$$\dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + \hat{b}v(t)$$

onde $\hat{b} = B\hat{u}$ e $\hat{A} = A + B\hat{F}$.

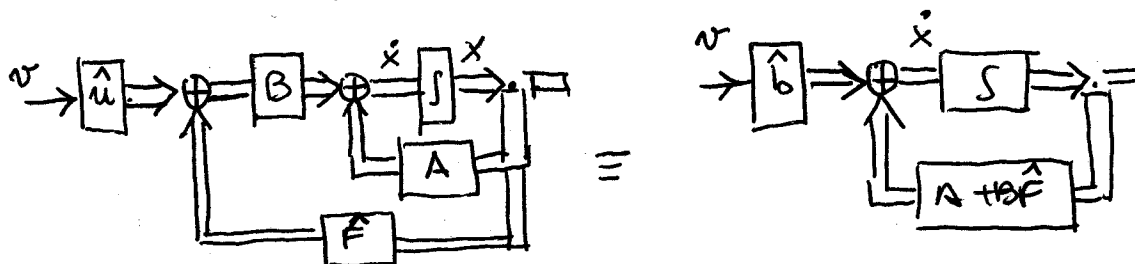


Figura 2: Redução do problema ao caso monovariável.

Lema 1 Seja (A, B) um sistema controlável com m entradas. Para todo $\hat{u} \in \mathcal{U}$ existe uma realimentação de estado \hat{F} tal que o par (\hat{A}, \hat{b}) seja controlável, onde $\hat{b} = B\hat{u}$ e $\hat{A} = A + B\hat{F}$.

Prova: Vide apêndice. \square

Desta forma, para determinar uma realimentação F tal que $A + BF$ possua os pólos desejados, devemos proceder da seguinte maneira:

- Determinar \hat{u} e \hat{F} (através do Lema 1) tais que $\hat{b} = B\hat{u}$ e $\hat{A} = A + B\hat{F}$ possuam a propriedade de que (\hat{A}, \hat{b}) seja controlável.
- Resolver o problema da imposição de pólos para (\hat{A}, \hat{b}) , determinando \hat{f} tal que $\sigma(\hat{A} + \hat{b}\hat{f})$ possua os pólos desejados.

- Implementar, a lei de controle $u = \hat{F} + \hat{u}f$ (justifique).

Observação :

- A redução de um sistema de várias entradas a um sistema de uma entrada apenas é uma péssima política na prática porque tende a gerar desperdício de energia nas leis de controle. A própria idéia de imposição de pólos é discutível como técnica de projeto. As técnicas de otimização das teorias de controle ótimo/robusto permitem realizar projetos muito mais efetivos nas aplicações.
- Apesar de a prova do lema 1 fornecer um algoritmo (bastante complicado) para determinação de \hat{u} e \hat{F} , pode-se mostrar que se gerarmos aleatoriamente o par (\hat{F}, \hat{u}) , a propriedade do lema 1 será satisfeita com probabilidade 1. Em termos de solução de exercícios isto é satisfatório (mas é claro que “chutar” aleatoriamente não é em geral uma boa técnica para um projeto sério).

◇

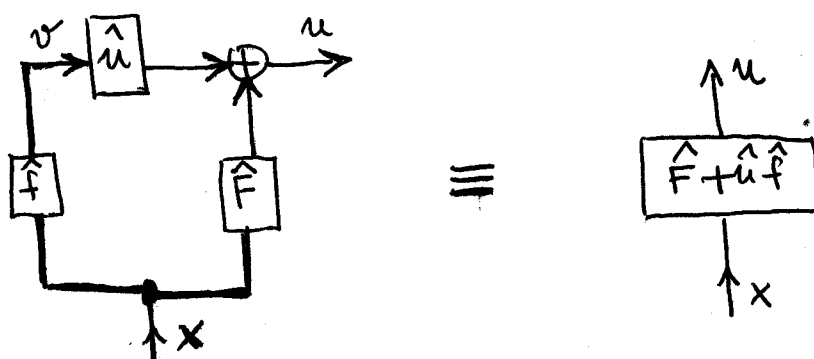


Figura 3: Realimentação equivalente

Assim podemos enunciar o resultado principal do capítulo:

Teorema 2 *Um sistema (A, B) é controlável se e somente se os pólos de $A + BF$ puderem ser impostos livremente para uma escolha adequada da realimentação de estado F .*

Prova: Se (A, B) é controlável, pelo método exposto após o lema 1 podemos impor os pólos livremente. Provemos agora que, se o sistema não for controlável, existe uma parte dos autovalores de A (exatamente os autovalores da parte não controlável) que não se alteram por a realimentação de estado. Assim, suponha que o sistema não é controlável e seja F uma realimentação qualquer. Então, do que foi visto no Cap. 2,

podemos escrever o sistema numa base onde os primeiros k vetores forma uma base de \mathcal{R}_0 . Fazendo a mudança de base $x = Tz$ teremos:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{F} = FT = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}$$

onde A_{11} é $k \times k$, A_{12} é $k \times n - k$, A_{22} é $n - k \times n - k$, B_1 é $k \times m$, F_1 é $m \times k$ e F_2 é $m \times n - k$. Agora note que,

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1F_1 & A_{12} + B_1F_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Devido à forma bloco-triangular da matriz $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$ segue-se que $\sigma(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}) = \sigma(A_{11} + B_1F_1) \uplus \sigma(A_{22})$ (onde \uplus denota união com repetição). Portanto, os pólos da parte não controlável A_{22} sempre aparecem no sistema em malha fechada e a imposição de pólos livre não é possível. \square

3 Estabilizabilidade

Nesta seção, estudaremos o conceito de estabilizabilidade. Começaremos pela definição:

Definição 2 *Um sistema (A, B) é estabilizável se existir uma realimentação de estado F tal que o sistema em malha fechada seja estável.*

Do que foi visto na prova do teorema 2, os pólos da parte não controlável estão sempre presentes no espectro de $(A + BF)$ para qualquer F (vide equação (11)). Por outro lado, também da equação (11), é fácil ver que os pólos da parte controlável são livremente impostos por F_1 (a matriz $A_{11} + B_1F_1$ pode ter seus pólos impostos livremente). Assim podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2 *(Critério de Estabilizabilidade) Um sistema (A, B) é estabilizável se e somente se a sua parte não controlável A_{22} for estável.*

Prova: Imediata a partir dos argumentos da demonstração do Teorema 2 e das observações acima. \square

A Apêndice — (Demonstrações)

A.1 Demonstração da proposição 1.

Prova: Precisamos mostrar que $\text{Im } \mathcal{C} = \text{Im } \tilde{\mathcal{C}}$, onde $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ e $\tilde{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} B & (A + BF)B & \dots & (A + BF)^{n-1}B \end{bmatrix}$ para qualquer realimentação $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$.

Para isso, note que para qualquer subespaço $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$, tem-se (exercício):

$$\text{Im}B + (A + BF)\mathcal{V} = \text{Im}B + A\mathcal{V} \quad (12)$$

Agora defina a seqüência de subespaços \mathcal{V}_k , $k = 0, \dots, n - 1$, tais que:

$$\mathcal{V}_0 = \text{Im}B \quad (13a)$$

$$\mathcal{V}_1 = \text{Im}B + A\mathcal{V}_0 = \text{Im}B + A\text{Im}B \quad (13b)$$

... ..

$$\mathcal{V}_{n-1} = \text{Im}B + A\mathcal{V}_{n-2} = \text{Im}B + A\text{Im}B + \dots + A^{n-1}\text{Im}B = \text{Im}C \quad (13c)$$

Analogamente podemos definir a seqüência de subespaços $\tilde{\mathcal{V}}_k$ trocando-se A por $A + BF$ em (13). Usando-se (12), é fácil mostrar por indução que $\tilde{\mathcal{V}}_k = \mathcal{V}_k$, $k = 0, \dots, n - 1$. Em particular os espaços controláveis $\tilde{\mathcal{V}}_{n-1} = \mathcal{V}_{n-1}$ coincidem. \square

A.2 Demonstração do lema 1.

Para provar¹ o lema 1, necessitaremos dois resultados auxiliares que apresentamos a seguir.

Lema 2 *Seja (A, B) um sistema controlável e suponha que \mathcal{V} é um subespaço A -invariante com $\dim \mathcal{V} < \dim \mathcal{X}$. Então existe $b \in \text{Im}B$ tal que $b \notin \mathcal{V}$.*

Prova: Devemos provar que $\text{Im}B$ não está contida em \mathcal{V} . Como o sistema é controlável, $\mathcal{R}_0 = \mathcal{X}$ é o menor A -invariante que contém $\text{Im}B$. Como \mathcal{V} é A -invariante e é propriamente contido em \mathcal{R}_0 , ele não pode conter $\text{Im}B$. \square

Lema 3 *Seja \mathcal{V} um subespaço A -invariante e seja $b \in \mathcal{X}$ tal que $b \notin \mathcal{V}$. Defina $\mathcal{R} = \text{Im} [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b]$. Sejam $\{v_1, \dots, v_k\}$ e $\{b, Ab, \dots, A^{p-1}b\}$ bases de \mathcal{V} e \mathcal{R} respectivamente (mostre que sempre existem bases de \mathcal{R} desta forma para algum $p \leq n$). Então existe uma base de $\mathcal{V} + \mathcal{R}$ da forma $\{v_1, \dots, v_k, b, Ab, \dots, A^{q-1}b\}$ onde $q \leq p$.*

Prova: Como $b \notin \mathcal{V}$, segue-se que o conjunto $\{v_1, \dots, v_k, b\}$ é L.I.. Por outro lado suponha por indução que $\mathbb{D}_{j-1} = \{v_1, \dots, v_k, b, Ab, \dots, A^{j-1}b\}$ é L.I. mas o conjunto $\mathbb{D}_j = \{v_1, \dots, v_k, b, Ab, \dots, A^j b\}$ é L.D. Mostraremos que \mathbb{D}_{j-1} é uma base de $\mathcal{V} + \mathcal{R}$. De fato, note que afirmar que \mathbb{D}_j é L.D. e \mathbb{D}_{j-1} é L.I. implica que $A^j b$ é gerado por \mathbb{D}_{j-1} , isto é, $A^j b = v + \sum_{i=0}^{j-1} A^i b$, com $v \in \mathcal{V}$. Da A -invariância de \mathcal{V} , aplicando-se A em

¹A prova do lema 1 é bastante complexa e não é necessária para o entendimento das principais idéias do capítulo.

ambos os lados da última equação nos leva a concluir que $A^{j+1}b$ também é gerado por \mathbb{D}_{j-1} . Por indução, mostra-se que $A^i b$ é gerado por \mathbb{D}_{j-1} para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Assim \mathbb{D}_{j-1} é L.I. e gera $\mathcal{V} + \mathcal{R}$, sendo portanto uma base. \square

Prova lema 1. Mostraremos que existe uma base de \mathcal{X} dada por $\{x_1, \dots, x_n\}$ tal que:

$$x_1 = b_1 \quad (14a)$$

$$x_{i+1} = Ax_i + b_i, \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (14b)$$

onde $b_i \in \text{Im } B$, isto é, existe \widehat{u}_i tal que $b_i = B\widehat{u}_i$. Assim podemos construir \widehat{F} , definindo:

$$\widehat{F}x_i = -\widehat{u}_i, \quad (i = 1, \dots, n)$$

E assim, se $\widehat{b} = b_1$, teremos (mostrar):

$$x_{i+1} = (A + B\widehat{F})^{i-1}\widehat{b}, \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

e portanto teremos que o par $(\widehat{A}, \widehat{b})$ é controlável, onde $\widehat{A} = A + B\widehat{F}$.

Mostremos agora a existência da base $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ que obedece (14). Construiremos tal base através de um algoritmo iterativo descrito a seguir:

Passo 1 Seja \widehat{b} qualquer vetor pertencente a $\text{Im } B$. Tome $\widehat{b}_1 = \widehat{b}$. Seja

$$\mathcal{V}_1 = \text{Im} \begin{bmatrix} \widehat{b}_1 & A\widehat{b}_1 & \dots & A^{n-1}\widehat{b}_1 \end{bmatrix}.$$

Pelos resultados do capítulo 2, temos que \mathcal{V}_1 é A -invariante. Defina $n_1 = \dim \mathcal{V}_1$. Considere a base de \mathcal{V}_1 dada por $\{\widehat{b}_1, A\widehat{b}_1, \dots, A^{n_1-1}\widehat{b}_1\}$. Se $n_1 < n$ vá ao passo seguinte. Caso contrário termine o algoritmo.

Passo k Partimos de \mathcal{V}_{k-1} construído no passo anterior. Temos que \mathcal{V}_{k-1} é A -invariante com uma base da forma

$$\mathbb{X}_{k-1} = \{\widehat{b}_1, A\widehat{b}_1, \dots, A^{n_1-1}\widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_{k-1}, A\widehat{b}_{k-1}, \dots, A^{n_{k-1}-1}\widehat{b}_{k-1}\}.$$

Suponha que $\dim \mathcal{V}_{k-1} < \dim \mathcal{X} = n$. Pelo lema 2 podemos tomar $b_k \in \text{Im } B$ tal que $b_k \notin \mathcal{V}_{k-1}$. Assim, seja

$$\mathcal{R}_k = \text{Im} \begin{bmatrix} \widehat{b}_k & A\widehat{b}_k & \dots & A^{n-1}\widehat{b}_k \end{bmatrix}$$

e $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_{k-1} + \mathcal{R}_k$. Pelo lema 3 existe uma base de \mathcal{V}_k da forma:

$$\mathbb{X}_k = \{\widehat{b}_1, A\widehat{b}_1, \dots, A^{n_1-1}\widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_k, A\widehat{b}_k, \dots, A^{n_k-1}\widehat{b}_k\}.$$

Se $\dim \mathcal{V}_k < n = \dim \mathcal{X}$, então execute o próximo passo. Caso contrário, \mathbb{X}_k é uma base de \mathcal{X} , e termine o algoritmo.

Observação : Seja $\widehat{B}_k = \left[\widehat{b}_1 \ \dots \ \widehat{b}_k \right]$. Como \mathbb{X}_k é um conjunto L.I. segue-se que as colunas de \widehat{B}_k são L.I.. Em particular como $\dim \text{Im } B = m$ segue-se que k não pode exceder m . Note que, enquanto $\dim \mathcal{V}_k < n = \dim \mathcal{X}$, o passo k do algoritmo produz \mathcal{V}_{k+1} com $\dim \mathcal{V}_{k+1} > \dim \mathcal{V}_k$. Assim sempre existe $k^* \leq m$ tal que $\mathcal{V}_k = \mathcal{X}$, e assim \mathbb{X}_{k^*} é uma base de \mathcal{X} (exercício). \diamond

Defina \widehat{b}_i , $i = 1, \dots, n$ por:

$$b_1 = \widehat{b}_1 \tag{15a}$$

$$b_i = \widehat{b}_j, \text{ se } \sum_{p=1}^{j-1} n_p < i \leq \sum_{p=1}^j n_p \tag{15b}$$

Note que a equação (15) constrói os n vetores b_i pela repetição de n_1 vezes do vetor \widehat{b}_1 , pela repetição de n_2 vezes do vetor \widehat{b}_2 e assim por diante. Isto é:

$$\{b_1, \dots, b_n\} = \left\{ \underbrace{\widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_1}_{n_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{\widehat{b}_{k^*}, \dots, \widehat{b}_{k^*}}_{n_{k^*} \text{ vezes}} \right\}$$

Agora defina:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_{i+1} &= Ax_i + b_i \end{aligned}$$

Do fato de \mathbb{X}_{k^*} ser uma base de \mathcal{X} , não é difícil mostrar que $\{x_1, \dots, x_n\}$ também é uma base de \mathcal{X} (que por construção obedece 14). \square

Cap. 6 – Observadores Dinâmicos e Compensadores

Visão Geral do Capítulo

Neste capítulo mostraremos que a observabilidade (detectabilidade) de um sistema permite construir um sistema linear \mathcal{O} , denominado observador, que estima assintoticamente o estado do sistema. O observador de estados \mathcal{O} possui como entradas a saída $y(t)$ e a entrada $u(t)$ do sistema e como saída o estado estimado $w(t)$, que converge para o estado $x(t)$ do sistema, isto é, $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) - \hat{x}(t) = 0$.

Mostraremos que taxa de convergência do observador pode ser imposta através de um problema de imposição de pólos por injeção da saída (conceito dual da realimentação de estado). O conceito de detectabilidade será introduzido como sendo a possibilidade de estabilização via injeção de saída. Se o sistema for detectável então o observador assintótico pode ser construído. Se o sistema for observável, os pólos do observador (e portanto a taxa de convergência) podem ser impostos livremente.

Como vimos no capítulo passado, podemos estabilizar (ou impor pólos de) um sistema controlável através de uma realimentação de estado. No entanto, na maioria dos casos práticos, o estado não está disponível para realizar a realimentação estabilizante. Em geral somente a saída ou conjunto de variáveis medidas através de sensores, está disponível para implementação da realimentação. Uma idéia bastante natural é a questão de realizar um compensador de estabilização (que só possui como informação a saída do sistema, e não todo o vetor de estado) através da realimentação do estado estimado $w(t)$, fornecido pelo observador. A teoria mostra que para tal esquema de compensação (denominado topologia observador-controlador) teremos que os pólos do sistema completo em malha fechada são os pólos do sistema com realimentação de estado e os pólos do observador de estado. Mais ainda, a matriz de transferência do sistema em malha fechada, considerando a nova entrada externa $v(t)$, será idêntica à matriz de transferência obtida por realimentação de estado. Isto significa que o projeto do observador e da realimentação de estados podem ser feitos de maneira independente. Tal resultado é denominado teorema da separação determinística, e será demonstrado neste capítulo.

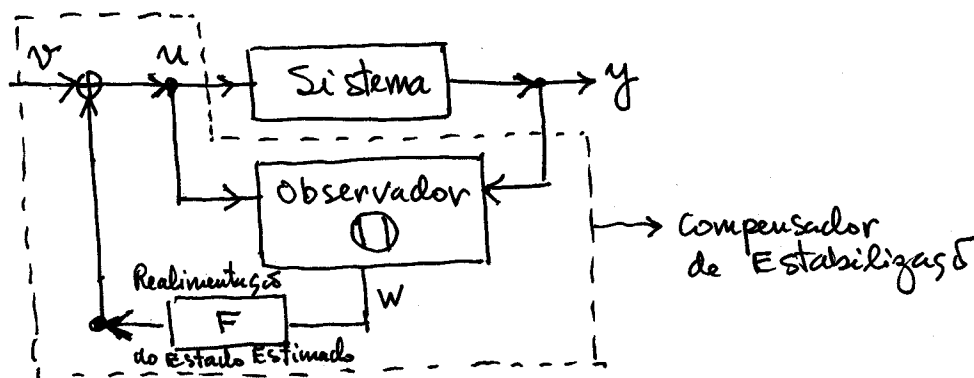


Fig. 1: Topologia Observador/Controlador

1 Injeção da saída

Seja um sistema (fictício) da forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1b)$$

$$x(t_0) = x_0, t \geq t_0 \quad (1c)$$

Onde $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ são aplicações lineares e \mathcal{X}, \mathcal{Y} espaços vetoriais de dimensão $d(\mathcal{X}) = n$ e $d(\mathcal{Y}) = l$.

Definição 1 Uma aplicação linear $K : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{X}$ é denominada injeção da saída. O sistema

$$\dot{x}(t) = (A - KC)x(t) \quad (2)$$

é denominado sistema em malha fechada com a injeção da saída.

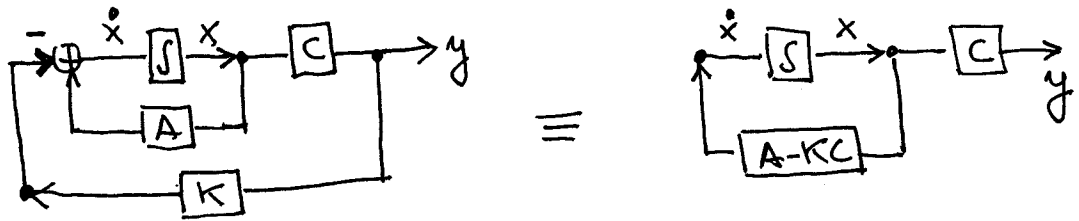


Fig.2: Injeção da saída K

No Capítulo 3 vimos que a imposição livre de pólos por realimentação de estado é equivalente à controlabilidade do sistema. O resultado a seguir é o resultado dual daquele teorema.

Teorema 1 Um par (C, A) é observável se e somente se os pólos de $A - KC$ puderem ser livremente impostos pela injeção da saída G .

Prova: Pelo lema 2 do Capítulo 3, se $A_1 = A^T$ e $B_1 = C^T$ então (A_1, B_1) é controlável se e somente se (C, A) for observável. Por outro lado seja $F_1 = -K^T$. Observe que uma realimentação de estado F_1 para o sistema dual (A_1, B_1) age como uma injeção da saída para o sistema (C, A) . Isto é imediato da igualdade $(A_1 + B_1 F_1) = (A - KC)^T$. Portanto¹ segue-se que $\sigma(A_1 + B_1 F_1) = \sigma(A - KC)^T$. Portanto, do Teorema 2 do capítulo 5, segue-se o resultado desejado. \square

¹Note que os autovalores $\sigma(A)$ de uma matriz quadrada A são os mesmos autovalores $\sigma(A^T)$ de sua transposta A^T .

Observação : Note que a demonstração do Teorema 1 sugere a seguinte técnica de imposição de pólos por injeção de saída K :

- Faça $A_1 = A^T$ e $B_1 = C^T$.
- Determine F_1 tal que $(A_1 + B_1 F_1)$ tenha os pólos desejados de acordo com a teoria do capítulo 5.
- Obtenha $K = -F_1^T$.

◇

2 Detectabilidade

O conceito dual da estabilizabilidade é denominado detectabilidade.

Definição 2 Dizemos que (C, A) é detectável se pudermos estabilizar $(A - KC)$ através da escolha de uma injeção da saída K adequada.

Como foi mostrado no capítulo 3, tomando uma base de \mathcal{X} em que os primeiros k vetores formam uma base do espaço não observável \mathcal{N}_0 , o sistema se reescreve como:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = [0 \quad C_2]$$

Lembremos que (C_2, A_{22}) é a parte observável do sistema.

Seja K uma injeção de saída arbitrária. Escrevendo K na nova base teremos:

$$\tilde{K} = T^{-1}K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} - K_1 C_2 \\ 0 & A_{22} - K_2 C_2 \end{bmatrix},$$

Da forma bloco triangular de $\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}$, segue-se que $\sigma(\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}) = \sigma(A_{11}) \uplus \sigma(A_{22} - K_2 C_2)$. Em outras palavras os pólos da parte não observável A_{11} estão sempre presentes no espectro de $\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}$. Por outro lado, pelo teorema 1 os pólos de $(A_{22} - K_2 C_2)$ podem ser impostos livremente pela escolha de C_2 , já que o par (A_{22}, C_2) é observável.

Assim, podemos enunciar o seguinte resultado, que é uma consequência imediata da discussão acima :

Proposição 1 : (*Critério de Detectabilidade*) As seguintes afirmativas são equivalentes:

- Um par (C, A) é detectável.

- Os pólos da parte não observável A_{11} do sistema são estáveis.
- O sistema dual (A_1, B_1) é estabilizável, onde $A_1 = A^T$ e $B_1 = C^T$.

Observação : Da proposição acima fica claro que as noções de detectabilidade e estabilidade são consideradas duais. Note também que o método de imposição de pólos da observação 1 pode ser usado mesmo no caso em que (C, A) é detectável mas não é observável. \diamond

A tabela abaixo resume as diversas noções e seu conceito dual:

Conceito	Conceito dual
Matriz	Matriz transposta
Sistema (A, B, C)	Sistema (A_1, B_1, C_1) onde $A_1 = A^T, B_1 = C^T, C_1 = B^T$
Realimentação de estado F	Injeção da saída $K_1 = -F^T$ do sistema dual
Injeção da saída K	Realimentação de estado $F_1 = -K^T$ do sistema dual.
Controlabilidade	Observabilidade do sistema dual
Observabilidade	Controlabilidade do sistema dual
Estabilizabilidade	Detectabilidade do sistema dual
Detectabilidade	Estabilizabilidade do sistema dual

3 Observadores de Ordem Completa

Consideraremos sistemas $\mathbb{S} = (A, B, C)$ da forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3b)$$

$$x(t_0) = x_0, t \geq t_0 \quad (3c)$$

onde $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}, C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, são transformações lineares, \mathcal{X}, \mathcal{U} e \mathcal{Y} são espaços vetoriais de dimensão n, m, l , respectivamente.

Agora considere um sistema dinâmico auxiliar $\mathcal{O} = (K, L, W)$ dado por

$$\dot{w}(t) = Ww(t) + Ky(t) + Lu(t) \quad (4a)$$

$$w(t_0) = w_0, t \geq t_0 \quad (4b)$$

onde $W : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $K : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ são transformações lineares.

Definição 3 Dizemos que \mathcal{O} é um observador de estados de ordem completa (observador assintótico ou simplesmente observador) se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (5)$$

onde $e(t)$ é o erro de observação, definido por:

$$e(t) = w(t) - x(t) \quad (6)$$

Note que:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{w}(t) - \dot{x}(t) \\ &= Ww(t) + Ky(t) + Lu(t) - Ax(t) - Bu(t) \\ &= Ww(t) + (A - KC)x(t) + (L - B)u(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Seja

$$L = B \quad (8a)$$

$$W = (A - KC) \quad (8b)$$

Substituindo (8a) e (8b) em (7), teremos

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t) \quad (9)$$

Logo, se $(A - KC)$ for uma matriz estável, teremos que o sistema será um observador, pois a equação (9) implicará em $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ para qualquer condição inicial $e(t_0)$. Por outro lado, da primeira parte do capítulo, podemos impor livremente os pólos de $A - KC$ se e somente se o sistema for observável. Se isto não ocorrer, podemos (pelo menos) estabilizar $A - KC$ se e só se o par (C, A) for detectável.

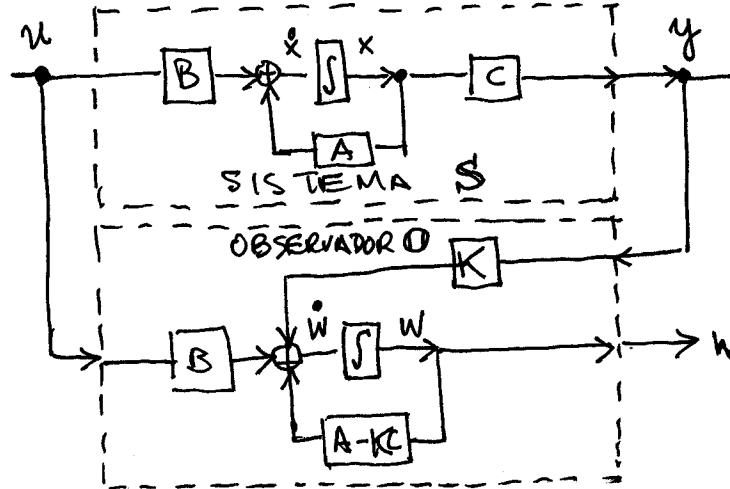


FIG.3: DIAGRAMA DE BLOCOS DO OBSERVADOR DE ESTADO \mathcal{O} .

4 Compensadores Baseados em Observadores de Ordem Completa

Agora suponha que realimentamos o estado estimado $w(t)$ fornecido pelo observador da equação (4), com as condições (8a)-(8b) obedecidas, através de uma lei de controle da forma :

$$u(t) = Fw(t) + v(t) \quad (10)$$

onde $v(t)$ é a nova entrada externa. Em malha fechada teremos o sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BFw(t) + Bv(t) \quad (11a)$$

$$\dot{w}(t) = (A - KC)w(t) + KCx(t) + BFw(t) + Bv(t) \quad (11b)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (11c)$$

$$x(t_0) = x_0, w(t_0) = w_0, t \geq t_0 \quad (11d)$$

E escrevendo as equações (11) matricialmente, teremos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & BF \\ KC & A - KC + BF \end{bmatrix}}_{A_c} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}}_{B_c} v(t) \quad (12a)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C_c} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (12b)$$

Fazendo a mudança de coordenadas $w = e + x$ ($e = w - x$) correspondendo à uma mudança de base:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}}_T \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

teremos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A - KC \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_c = T^{-1}A_c T} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}}_{\tilde{B}_c = T^{-1}B_c} v(t) \quad (13a)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}_c = C_c T} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (13b)$$

E assim podemos enunciar o teorema da separação determinística:

Teorema 2 (da Separação Determinística) *Seja um compensador baseado em observador tal que as equações em malha fechada com o sistema são da forma (12). Então:*

- (i) Os pólos do sistema em malha fechada são dados por $\sigma(A + BF) \uplus \sigma(A - KC)$, onde \uplus indica união com repetição.
- (ii) A matriz de transferência $G_c(s)$ da nova entrada $v(t)$ para a saída $y(t)$ do sistema em malha fechada (12) é dada por:

$$G_c(s) = C(sI - A - BF)^{-1}B$$

Prova: Note que (i) é consequência da forma bloco triangular da matriz de sistema \tilde{A}_c da equação (13). Por outro lado, (ii) é consequência imediata da seguinte fórmula de inversão de matrizes de blocos :

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{-1} & -Q_{11}^{-1}Q_{12}Q_{22}^{-1} \\ 0 & Q_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

De fato

$$\begin{aligned} G_c(s) &= C_c(sI - A_c)^{-1}B_c \\ &= \tilde{C}_c(sI - \tilde{A}_c)^{-1}\tilde{B}_c \\ &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A - BF & -BF \\ 0 & sI - A + KC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A - BF)^{-1} & X \\ 0 & (sI - A + KC)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A - BF)^{-1}B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= C(sI - A - BF)^{-1}B \end{aligned}$$

□

Observação : (Importante). No teorema acima, (i) nos diz que os pólos do sistema em malha fechada com o compensador são obtidos a partir dos pólos de uma realimentação de estado e uma injeção da saída, separadamente (assim o projeto do controlador F e do observador podem ser independentes²). Já a afirmação (ii) nos diz que a matriz de transferência do sistema em malha fechada com o compensador é a mesma obtida com a realimentação de estado $u(t) = Fx(t) + v(t)$. ◇

²Para um projeto que leve em conta a robustez do sistema nem sempre o projeto independente leva a bons resultados.

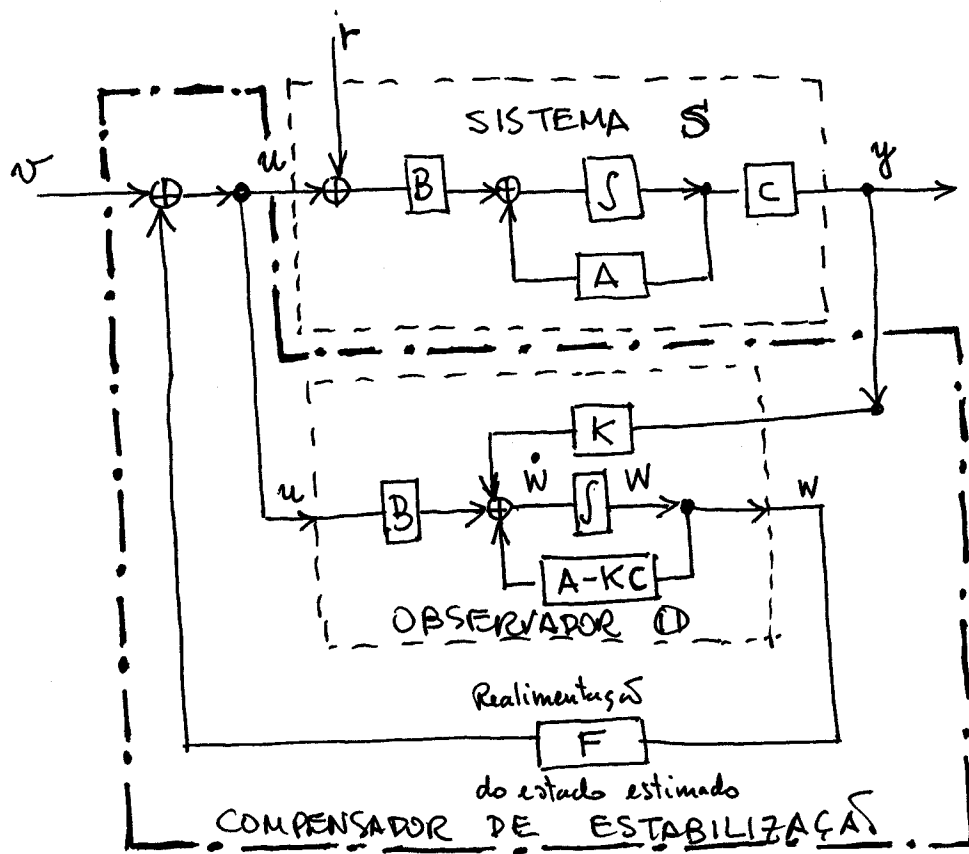


FIG.4: A FIGURA ACIMA MOSTRA UM COMPENSADOR BASEADO NA TOPOLOGIA OBSERVADOR CONTROLADOR. O SINAL DE ENTRADA $v(t)$ É A ENTRADA DE CONTROLE EXTERNA E O SINAL $r(t)$ É UMA PERTURBAÇÃO DESCONHECIDA.

Observação : Considere a perturbação não conhecida $r(t)$ como entrada e $y(t)$ como saída (fazendo $v(t) \equiv 0$). Então, a matriz de transferência $H(s)$ tal que $Y(s) = H(s)R(s)$ conterá os pólos de $(A + BF)$ e de $(A - KC)$ (determine $H(s)$ como exercício). \diamond

Cap. 7 – Teoria da Regulação e Rastreamento

Visão Geral do Capítulo

Neste capítulo estudaremos os problemas de *regulação* e *rastreamento*. A *teoria da regulação* trata o problema de projetar um sistema de controle que seja capaz de eliminar assintoticamente o efeito na saída de uma perturbação $w(t)$ desconhecida, mas que obedeça uma equação linear autônoma conhecida (por exemplo $\dot{w} = 0$ para a perturbação degrau). A *teoria do rastreamento* estuda o problema de projetar um sistema de controle que garanta que a saída do sistema siga um sinal de referência $r(t)$ com um erro assintótico nulo. O sinal de referência não é conhecido à priori, mas também obedece uma equação diferencial autônoma. Mostraremos que o problema de regulação é um caso particular do problema de rastreamento e que a solução dos dois problemas é diretamente relacionada ao *princípio do modelo interno*. Tal princípio é filosoficamente simples de enunciar :

Para resolver o problema de regulação/rastreamento, é preciso incorporar ao sistema um modelo da perturbação/referência.

Começaremos o capítulo com uma revisão de alguns conceitos básicos vistos em Controle I, que nos fornecerá uma visão freqüencial dos problemas. Para perturbação (ou referência) degrau, veremos que o modelo interno é um integrador. Se o incorporamos ao sistema, podemos então solucionar os problemas de regulação/rastreamento. Para perturbações (e sinais de referência) do tipo senoidal, o modelo interno é um oscilador harmônico. Esses exemplos servirão de base para introdução de uma teoria no domínio do tempo, apresentada na segunda parte do capítulo.

1 Introdução e Motivação

Nesta seção motivaremos nossos problemas com vários exemplos simples, utilizando apenas conceitos da disciplina de Controle I. A teoria aprendida naquela disciplina nos mostra que *sistemas do tipo 1*, isto é, sistemas que possuem 1 pólo na origem, são tais que o erro de regime a degrau¹ é nulo. De fato, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 1 A função de transferência de um motor DC é $G(s) = \frac{1}{s+1}$. Um engenheiro acrescentou um integrador $H(s) = 1/s$ na entrada do sistema obtendo o sistema em malha fechada da figura 1. O lugar de raízes correspondente é mostrado na figura 2.

¹Com realimentação unitária e estabilidade em malha fechada.

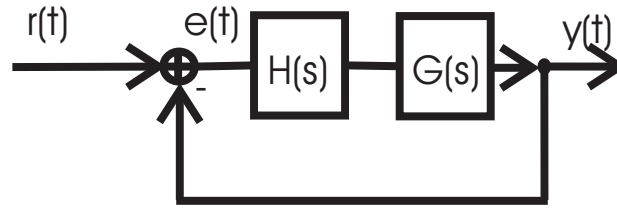


Figura 1: Sistema em malha fechada.

Note agora que a função de transferência $E(s)/R(s)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{R(s)} &= \frac{1}{1 + \frac{K}{s} \frac{1}{s+1}} \\ &= \frac{s(s+1)}{s^2 + s + K} \end{aligned}$$

Se $r(t)$ é o degrau unitário, então $R(s) = 1/s$. Como o sistema em malha fechada é estável para todo $K > 0$ (vide lugar de raízes da figura 2), podemos aplicar o teorema do valor final para $e(t)$, obtendo:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+1)}{s^2 + s + K} \cdot \frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim a inclusão do integrador na malha garantiu que o erro de regime a degrau seja nulo, ou seja, a saída *rastreia* a entrada degrau com erro assintótico nulo. Isto pode ser visto na simulação da figura 3. ♣

Exemplo 2 Agora considere o mesmo sistema do exemplo 1, mas com uma perturbação degrau $w(t)$ aplicada conforme a figura 4.

Determinando-se a função de transferência $Y(s)/W(s)$ teremos

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{W(s)} &= \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{K}{s} \frac{1}{s+1}} \\ &= \frac{s}{s^2 + s + K} \end{aligned}$$

Se $w(t)$ é o degrau unitário, então $W(s) = 1/s$. Como o sistema em malha fechada é estável para todo $K > 0$ (vide lugar de raízes da figura 2), podemos aplicar o teorema

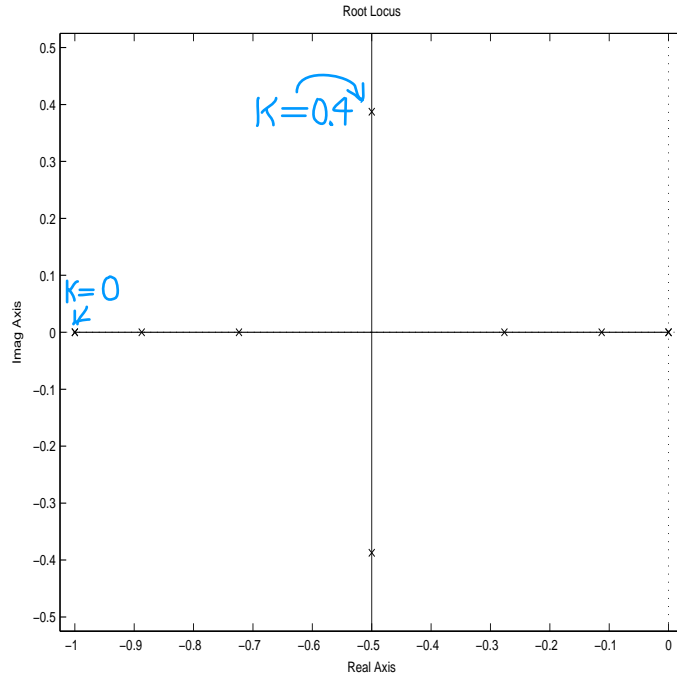


Figura 2: Lugar de raízes de $K \frac{1}{s(s+1)}$. Os “x” indicam os pólos para $K = 0, 0.1, 0.2, 0.4$. O “x” fora do eixo real são os pólos para $K = 0.4$.

do valor final para $y(t)$, obtendo:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s}{s^2 + s + K} \cdot \frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim a inclusão do integrador na malha garantiu que a influência da perturbação degrau $w(t)$ na saída $y(t)$ seja assintoticamente eliminada. Isto pode ser visto na simulação da figura 5. Portanto o problema de regulação para perturbação do tipo degrau foi solucionado. Sendo assim, do que vimos dos exemplos 1 e 2, e da linearidade do sistema, vemos que os problemas de rastreamento e a regulação estão resolvidos. ♣

Exemplo 3 Considere agora perturbações $w(t)$ e referências $r(t)$ senoidais de frequência igual a 1 radiano por segundo. Assim $w(t) = A \cos(t + \phi)$. Calculando a transformada de Laplace $\mathcal{L}(w(t))$ (ou de $\mathcal{L}(r(t))$) mostra-se que ela é da forma:

$$\mathcal{L}(w(t)) = \frac{as + b}{s^2 + 1} \tag{1}$$

onde a e b são funções de A e ϕ (exercício). Considere o compensador $H(s) = K(s + 1)^2 / (s^2 + 1)$ adicionado na entrada do motor na mesma topologia em malha fechada da figura 4.

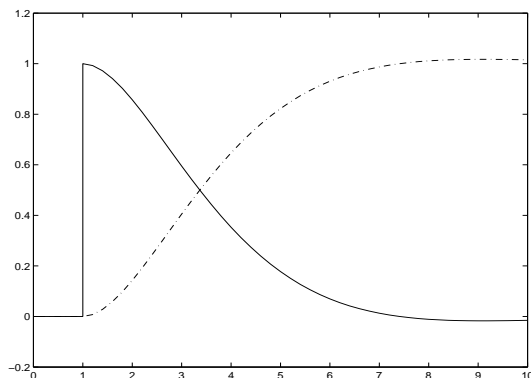


Figura 3: Resposta ao degrau na entrada do sistema em malha fechada do exemplo 1 para $K = 0.4$. O sinal $e(t)$ é a curva contínua e $y(t)$ é tracejada (o eixo horizontal representa o tempo em segundos).

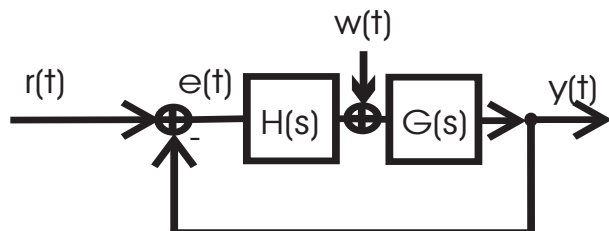


Figura 4: Sistema em malha fechada com perturbação $w(t)$.

Calculando-se as funções de transferência $E(s)/R(s)$ (para $w(t) \equiv 0$) e $Y(s)/W(s)$ (para $r(t) \equiv 0$), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{R(s)} &= \frac{1}{1 + \frac{K(s+1)^2}{(s^2+1)(s+1)}} \\ &= \frac{(s^2 + 1)}{(s^2 + (K + 1)s + K)} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{W(s)} &= \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{K(s+1)^2}{(s^2+1)(s+1)}} \\ &= \frac{(s^2 + 1)}{(s^2 + (K + 1)s + K)(s + 1)} \end{aligned} \quad (3)$$

Note que o lugar de raízes de tal sistema é da forma da figura 6.

Seja $r(t) = A \cos(t + \phi)$. Como o sistema é estável para $K \leq 1$ (vide figura 6), podemos determinar a resposta em regime permanente senoidal para esta faixa de K .

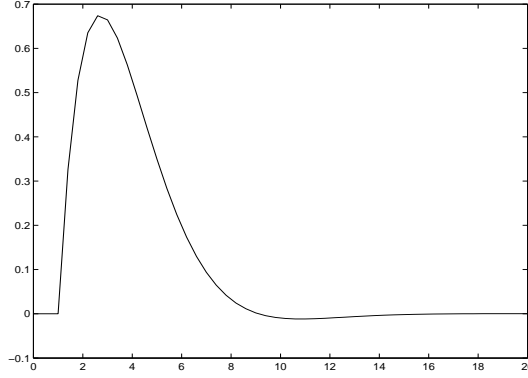


Figura 5: Resposta $y(t)$ com perturbação degrau $w(t)$ e $r(t) \equiv 0$ para o sistema em malha fechada do exemplo 2 para $K = 0.4$ (o eixo horizontal representa o tempo em segundos).

Fazendo $s = +j$ em (2) e em (3), conclui-se que ambas respostas em regime permanente são nulas. Em outras palavras, o erro de rastreamento tende à zero, assim como a influência de uma perturbação senoidal na saída. Segue-se que tanto o problema simultâneo de regulação e rastreamento é solucionado por este compensador. Na figura 7 fornecemos uma simulação da resposta do sistema em malha fechada para um sinal de referência $r(t) = \sin(t + \pi/3)$ e para uma perturbação $w(t) = \sin(t + \pi/4)$. ♣

Os exemplos anteriores possuem o seguinte princípio em comum. Para solução do problema de regulação/rastreamento incluiu-se no sistema um modelo da perturbação. Como já dissemos acima, isto se constitui exatamente no princípio do modelo interno. Para perturbação senoidal de frequência Ω , assumamos que adicionamos na entrada do sistema $G(s)$ um compensador $H(s)$ com pólos em $\pm j\Omega$ na configuração da figura 1.

Suponha também que o sistema em malha fechada da figura 1 seja estável. Um cálculo simples mostra que a resposta em regime permanente do erro $e(t)$ para perturbações e sinais de referência senoidais na frequência Ω é nula, ou seja, o erro tende assintoticamente para zero, garantido a solução simultânea dos problemas de rastreamento/regulação.

De fato, assumamos que o sistema $G(s)$ não possua pólos² em $\pm j\Omega$. Seja:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

E denote $F(j\Omega) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}|_{s=j\Omega}$. Note que $\lim_{s \rightarrow j\Omega} \|H(s)\| = +\infty$. Como $\lim_{s \rightarrow j\Omega} \|G(s)\|$ é finito, segue-se que $F(j\Omega) = 0$. Assumamos também que $G(s)$ não possui zeros em $\pm j\Omega$. Seja

$$V(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

Nestas condições, $\lim_{s \rightarrow j\Omega} \|G(s)\|$ é finito e não nulo e $\lim_{s \rightarrow j\Omega} \|H(s)\| = +\infty$, segue-se que $V(j\Omega) = 0$. Podemos resumir tais propriedades no seguinte resultado:

²Se $G(s)$ possui pólos em $\pm j\Omega$ não precisamos que $H(s)$ os tenha. Mostre como exercício que neste caso também podemos resolver o problema da regulação.

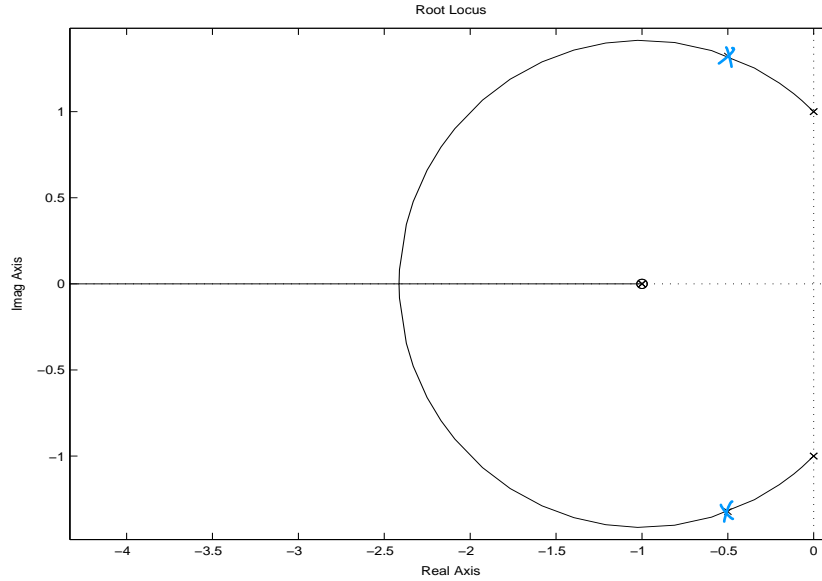


Figura 6: Lugar de raízes de $K \frac{(s+1)^2}{s^2+1} \frac{1}{s+1}$. Os “x” à esquerda do eixo imaginário indicam os pólos para $K = 1$.

Proposição 1 *Seja $G(s)$ um sistema monovariável e suponha que projetamos um compensador $H(s)$ conectado à entrada de $H(s)$ como mostrado na figura 1. Assuma que:*

- $H(s)$ possui pólos em $\pm j\Omega$.
- O sistema em malha fechada é estável.
- $G(s)$ não possui pólos em $\pm j\Omega$.

Então $H(s)$ é uma solução para o problema de regulação de distúrbios senoidais $w(t)$ na frequência Ω . Mais ainda, se $G(s)$ não possui zeros em $\pm j\Omega$, então $H(s)$ também soluciona o problema de rastreamento para referências $r(t)$ senoidais de frequência Ω .

No caso em que $G(s)$ possui pólos em $\pm j\Omega$, também podemos mostrar um resultado análogo (vide apêndice).

O restante do capítulo tentará generalizar estas idéias para sistemas multivariáveis e tipos de perturbações e sinais de referência mais gerais através de uma abordagem no espaço de estados.

2 Definição dos problemas

Considere um sistema da forma:

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \quad (4a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4b)$$

$$x(t_0) = x_0, t \geq t_0 \quad (4c)$$

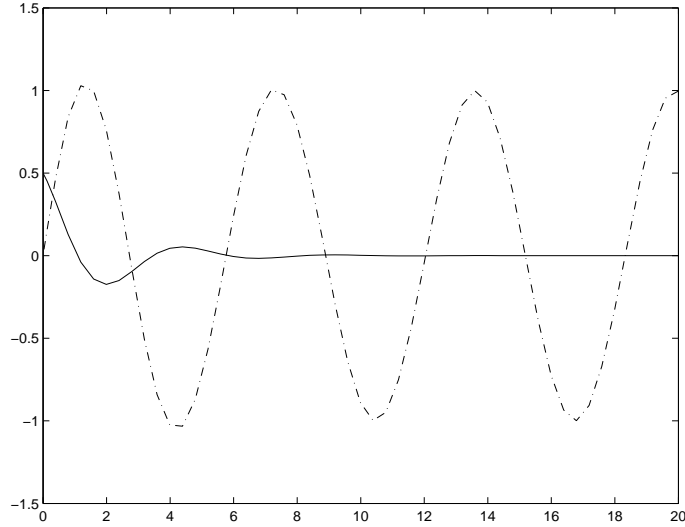


Figura 7: Respostas $y(t)$ e $e(t)$ do sistema para $r(t) = \sin(t + \pi/3)$ e para uma perturbação $w(t) = \sin(t + \pi/4)$. O sinal $y(t)$ é representado pela linha tracejada e o sinal $e(t)$ pela linha contínua.

Como no capítulo 2, teremos $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$, $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $E : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{X}$ são transformações lineares, \mathcal{X} , \mathcal{U} , \mathcal{Y} e \mathcal{W} são espaços vetoriais de dimensão n , m , l e p respectivamente. O espaço vetorial \mathcal{X} é chamado espaço de estados ($x(t)$ é o vetor de estado no instante t), \mathcal{Y} é o espaço de saídas ($y(t)$ é o vetor de saídas no instante t) e \mathcal{U} é o espaço das entradas ($u(t)$ é o vetor de entradas no instante t). A entrada externa $u(t)$ pertence ao conjunto \mathbb{U} de funções de entrada admissíveis. Por simplicidade vamos supor que \mathbb{U} é o conjunto das funções contínuas por partes de $[t_0, \infty)$ em \mathcal{U} . O sinal $w(t) \in \mathcal{W}$ é um sinal de distúrbio. Também por simplicidade, vamos supor inicialmente que $E = B$, isto é, **a perturbação age aditivamente na entrada do sistema**. Considere agora a seguinte hipótese.

Hipótese H1. Considere o seguinte sistema:

$$\dot{x}_\Omega(t) = A_\Omega x_\Omega(t) \quad (5a)$$

$$y_\Omega(t) = C_\Omega x_\Omega \quad (5b)$$

$$x_\Omega(t_0) = x_\Omega^0 \quad (5c)$$

Chamamos de hipótese *H1* a propriedade de que, para qualquer perturbação $w(t)$ que possa ocorrer no sistema, existe x_Ω^0 tal que $w(t) = y_\Omega(t) = e^{A_\Omega t} x_\Omega^0$. Em outras palavras, (5) é um modelo da perturbação. Podemos assumir sem perda de generalidade que tal sistema é observável (caso contrário podemos tomar sua parte observável, que possuirá a mesma propriedade).

Definição 1 : PROBLEMA DE REGULAÇÃO. Queremos projetar um sistema de controle com a topologia da figura 4 de tal maneira que o sistema em malha fechada possua as seguintes propriedades:

- Considerando $w(t) \equiv 0$, e $r(t) \equiv 0$, o sistema em malha fechada deve ser internamente estável, isto é, para quaisquer condições iniciais do sistema e do compensador, os estados do sistema e do compensador tendem a zero.
- A influência da perturbação na saída do sistema em malha fechada $y(t)$ tende assintoticamente para zero. Em outras palavras, para $r(t) \equiv 0$, teremos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

na presença de qualquer distúrbio $w(t)$ que obedeça à hipótese H1.

Para definir o problema de rastreamento consideramos a seguinte hipótese:

Hipótese H2. Considere o seguinte sistema:

$$\dot{\tilde{x}}_{\Omega}(t) = \tilde{A}_{\Omega} \tilde{x}_{\Omega}(t) \quad (6a)$$

$$\tilde{y}_{\Omega}(t) = \tilde{C}_{\Omega} \tilde{x}_{\Omega}(t) \quad (6b)$$

$$\tilde{x}_{\Omega}(t_0) = \tilde{x}_{\Omega}^0 \quad (6c)$$

Chamamos de hipótese H2 a propriedade de que, para qualquer sinal de referência $r(t)$ que possa ser aplicado no sistema, existe x_{Ω}^0 tal que $r(t) = \tilde{y}_{\Omega}(t) = e^{\tilde{A}_{\Omega} t} \tilde{x}_{\Omega}^0$. Em outras palavras, (6) é um modelo dos sinais de referência.

Definição 2 : PROBLEMA DE RASTREAMENTO. Queremos projetar um sistema de controle $H(s)$ com a topologia da figura 4 de tal maneira que o sistema em malha fechada possua as seguintes propriedades:

- Considerando $w(t) \equiv 0$ e $r(t) \equiv 0$ o sistema em malha fechada deve ser internamente estável, isto é, para quaisquer condições iniciais do sistema e do compensador, os estados do sistema e do compensador tendem a zero.
- O erro de rastreamento tende a zero na presença da perturbação. Em outras palavras:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) - r(t) = 0.$$

na presença de qualquer distúrbio $w(t)$ que obedeça à hipótese H1 e qualquer referência $r(t)$ que obedeça à hipótese H2.

Observação : Note que o rastreamento é uma generalização da regulação. Fazendo-se $r(t) \equiv 0$ na definição do rastreamento, recaímos na definição de regulação. \diamond

3 Solução do problema de regulação e rastreamento

Suponha que o sinal de distúrbio $w(t)$ obedeça a hipótese $H1$. Sempre podemos construir B_Ω tal que o **sistema auxiliar**:

$$\dot{x}_\Omega(t) = A_\Omega x_\Omega(t) + B_\Omega u_\Omega \quad (7a)$$

$$y_\Omega(t) = C_\Omega x_\Omega \quad (7b)$$

$$x_\Omega(t_0) = x_\Omega^0 \quad (7c)$$

seja controlável (e observável pela observação feita logo antes da hipótese $H1$). Conectamos o sistema aumentado no sistema (4) (com $E = B$) fazendo $u = v + y_\Omega$. Desta forma obtemos o **sistema aumentado** da figura 8 cujas equações são:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) + By_\Omega(t) + Bw(t) \quad (8a)$$

$$\dot{x}_\Omega(t) = A_\Omega x_\Omega(t) + B_\Omega u_\Omega \quad (8b)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (8c)$$

$$y_\Omega(t) = C_\Omega x_\Omega \quad (8d)$$

Uma representação do sistema aumentado pode ser vista na figura 8.

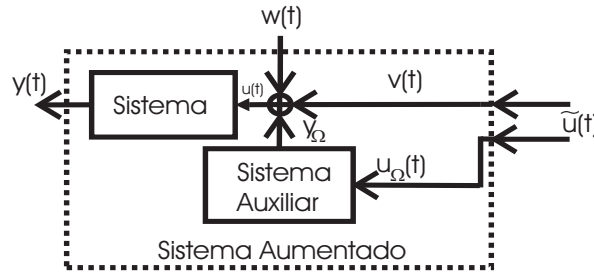


Figura 8: *Sistema aumentado.*

Teorema 1 *Qualquer compensador de estabilização baseado em observador para o **sistema aumentado** (vide figura 9), é uma solução para o problema de regulação. Em particular, uma condição suficiente para existência de solução para o problema de regulação é que o sistema aumentado seja estabilizável e detectável.*

Prova: Escrevendo matricialmente as equações do sistema aumentado teremos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_\Omega \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & BC_\Omega \\ 0 & A_\Omega \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x \\ x_\Omega \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B_\Omega \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \begin{bmatrix} v \\ u_\Omega \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{E}} w(t)$$

$$\tilde{y} = y = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \begin{bmatrix} x \\ x_\Omega \end{bmatrix}$$

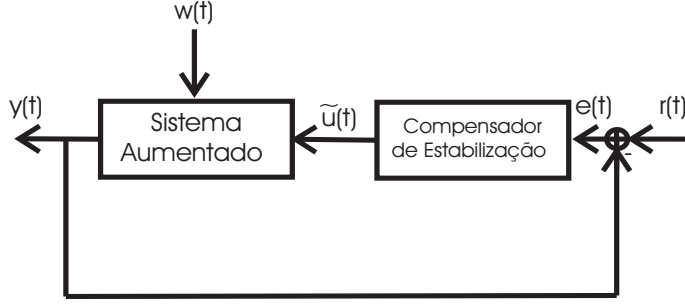


Figura 9: Topologia do compensador de estabilização para solução do problema de regulação.

Pela hipótese $H1$, sabemos que $w(t)$ é da forma $w(t) = C_\Omega \bar{x}_\Omega(t)$ onde $\bar{x}_\Omega(t)$ é solução da equação autônoma (5). Considere a seguinte mudança de variáveis:

$$\tilde{x}_\Omega(t) = x_\Omega(t) + \bar{x}_\Omega(t) \quad (9)$$

De (8), teremos:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_\Omega(t) &= \dot{x}_\Omega(t) + \dot{\bar{x}}_\Omega(t) \\ &= A_\Omega x_\Omega + B_\Omega u_\Omega + A_\Omega \bar{x}_\Omega \\ &= A_\Omega \tilde{x}_\Omega + B_\Omega u_\Omega \end{aligned}$$

Por outro lado, $y_\Omega = Cx_\Omega = C\tilde{x}_\Omega - C\bar{x}_\Omega$. Portanto, de (8) e (9) segue-se que:

$$\dot{x} = Ax + Bv + \underbrace{Bw - BC_\Omega \bar{x}_\Omega}_0 + BC_\Omega \tilde{x}_\Omega$$

Escrevendo matricialmente as equações acima teremos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}}_\Omega \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & BC_\Omega \\ 0 & A_\Omega \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x}_\Omega \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B_\Omega \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \begin{bmatrix} v \\ u_\Omega \end{bmatrix} \quad (10a)$$

$$\tilde{y} = y = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x}_\Omega \end{bmatrix} \quad (10b)$$

Note que as equações (10) são as equações do sistema aumentado fazendo-se $w(t) \equiv 0$. Assim, se projetarmos um compensador estabilizante, por exemplo um compensador baseado em observador utilizando-se as técnicas do Cap 6, teremos que, na presença do distúrbio que satisfaz $H1$, que $\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}_\Omega(t) \end{bmatrix} = 0$. Em particular a saída do sistema também tende para zero, e portanto o compensador é solução do problema de regulação. \square

turbação, sabendo-se que o procedimento é análogo para a referência.

Suponha que $w_i(t) = \sum_{j=1}^k A_j e^{\nu_j t}$. Note que ν_j pode ser complexo, e neste caso as exponenciais complexas devem ser combinadas em pares conjugados para formar funções reais (por exemplo senoidais, para $\nu_j = i\Omega_j$). Queremos construir uma equação diferencial linear

$$\xi^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}\xi^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_0\xi(t) = 0 \quad (11)$$

tal que $w_i(t)$ seja solução de (11).

Usando a teoria de sistemas lineares, mostra-se (através de propriedades de Matrizes Wonskrianas) que a ordem da equação n é no mínimo igual a k e que ν_j é raiz da equação característica

$$\pi(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0s = 0$$

$j = 1, \dots, k$. Assim podemos montar a equação (11) fazendo-se $n = k$ e:

$$\pi(s) = \prod_{j=1}^k (s - \nu_j)$$

e com isso determinando-se os coeficientes $\alpha_r, r = 0, \dots, k - 1$.

Para construção do modelo interno em forma de estado basta transformar a equação (11) na equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}^{(0)} \\ \dot{\xi}^{(1)} \\ \vdots \\ \dot{\xi}^{(n-2)} \\ \dot{\xi}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{A_i} \begin{bmatrix} \xi^{(0)} \\ \xi^{(1)} \\ \vdots \\ \xi^{(n-2)} \\ \xi^{(n-1)} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_i} u \quad (12a)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_i} \begin{bmatrix} \xi^{(0)} \\ \xi^{(1)} \\ \vdots \\ \xi^{(n-2)} \\ \xi^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (12b)$$

Proceda igualmente para todos os $w_i, i = 1, \dots, p$. Assim, defina:

$$A_\Omega = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_p \end{bmatrix}, \quad B_\Omega = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_p \end{bmatrix} \quad (13a)$$

$$C_\Omega = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_p \end{bmatrix} \quad (13b)$$

Exemplo 4 Seja $\delta(t)$ o degrau unitário. Suponha que a perturbação é escalar e dada por $w(t) = A_0\delta(t) + A_1\text{sen}(10t + \phi_1) + A_2\text{sen}(20t + \phi_2)$. Assim

$$\begin{aligned}\pi(s) &= s(s + i10)(s - i10)(s + i20)(s - i20) \\ &= s^5 + 0s^4 + 500s^3 + 0s^2 + 40000s + 0\end{aligned}$$

Assim:

$$A_\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -40000 & 0 & -500 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_\Omega = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$



A Apêndice

O seguinte resultado é deixado como exercício:

Proposição 2 *Seja $G(s)$ un sistema monovariável e assuma que projetamos um compensador $H(s)$ conectado à entrada de $H(s)$ como mostrado na figura 1. Assuma que:*

- $H(s)$ possui pólos mas não possui zeros em $\pm j\Omega$.
- O sistema em malha fechada é estável.
- $G(s)$ possui pólos em $\pm j\Omega$.

Então $H(s)$ é uma solução para o problema de regulação de distúrbios senoidais $w(t)$ na frequência Ω . Mais ainda, se $G(s)$ não possui zeros em $\pm j\Omega$, então $H(s)$ também soluciona o problema de rastreamento para referências $r(t)$ senoidais frequência Ω .

O resultado seguinte nos mostra que, mesmo quando $E \neq B$, algumas condições podem garantir que o compensador da figura 10 ainda forneça uma solução para o problema de regulação:

Proposição 3 *Assuma que $E \neq B$. Seja $(\widehat{C}_\Omega, A_\Omega)$ o modelo interno da perturbação (que é inserida através da matriz E). Note que tal modelo interno é análogo à equação (8). Seja C_Ω uma matriz tal que os produtos $C_\Omega A_\Omega$ e BC_Ω estejam bem definidos.*

Defina o par $(\widehat{C}, \widehat{A})$ dado por

$$\widehat{C} = [C \ 0 \ 0], \quad \widehat{A} = \begin{bmatrix} A & BC_\Omega & E\widehat{C}_\Omega \\ 0 & A_\Omega & 0 \\ 0 & 0 & A_\Omega \end{bmatrix}$$

Note que as matrizes \widehat{C} e \widehat{A} representam transformações lineares $\widehat{C} : \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_\Omega \oplus \mathcal{X}_\Omega \rightarrow \mathcal{Y}$ e $\widehat{A} : \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_\Omega \oplus \mathcal{X}_\Omega \rightarrow \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_\Omega \oplus \mathcal{X}_\Omega$. Seja $P_2 : \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_\Omega \oplus \mathcal{X}_\Omega \rightarrow \mathcal{X}_\Omega$ a projeção canônica definida por $P_2((x, x_{\Omega_1}, x_{\Omega_2})^T) = x_{\Omega_2}$. Seja \mathcal{N}_0 o espaço não observável do par $(\widehat{C}, \widehat{A})$. Assuma que $P_2\mathcal{N}_0 = \mathcal{X}_\Omega$ e é possível construir um compensador estabilizante para o sistema 10. Então o compensador da figura 10 fornece solução para o problema de regulação (mesmo com $E \neq B$).

Prova: Seja $w(t)$ um sinal de distúrbio que obedece a hipótese H1. Assim existe uma solução $\bar{x}_{\Omega_2}(t)$ da equação autônoma a seguir

$$\dot{x}_{\Omega_2}(t) = A_\Omega x_{\Omega_2}(t)$$

tal que

$$w(t) = \widehat{C}_\Omega \bar{x}_{\Omega_2}(t) \quad (14)$$

Seja $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_\Omega \oplus \mathcal{X}_\Omega$. Do fato de $P_2\mathcal{N}_0 = \mathcal{X}_\Omega$, segue-se que podemos tomar um vetor $\zeta_0 = (x^0, x_{\Omega_1}^0, x_{\Omega_2}^0)^T$ em \mathcal{Z} tal que $x_{\Omega_2}^0 = \bar{x}_{\Omega_2}(t_0)$ e $\zeta_0 \in \mathcal{N}_0$. Note agora que, da forma bloco triangular de \widehat{A} , temos que $P_2 e^{\widehat{A}t} = \bar{x}_{\Omega_2}(t)$. Seja $\zeta(t) = (\bar{x}(t), \bar{x}_{\Omega_1}(t), \bar{x}_{\Omega_2}(t)) = e^{\widehat{A}t} \zeta_0$. Desenvolvendo a equação $\dot{\zeta}(t) = \widehat{A}\zeta(t)$ obtemos:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + BC_\Omega \bar{x}_{\Omega_1} + E\widehat{C}_\Omega \bar{x}_{\Omega_2} \quad (15a)$$

$$\dot{\bar{x}}_{\Omega_1} = A_\Omega \bar{x}_{\Omega_1} \quad (15b)$$

$$\dot{\bar{x}}_{\Omega_2} = A_\Omega \bar{x}_{\Omega_2} \quad (15c)$$

Seja $z = x - \bar{x}$, $z_{\Omega_1} = x_{\Omega_1} - \bar{x}_{\Omega_1}$, e $z_{\Omega_2} = x_{\Omega_2} - \bar{x}_{\Omega_2}$. Derivando no tempo z , z_{Ω_1} e z_{Ω_2} e usando (4), (14) e (15) obtemos:

$$\dot{z} = Az + BC_\Omega z_{\Omega_1} + Bu \quad (16a)$$

$$\dot{z}_{\Omega_1} = A_\Omega z_{\Omega_1} + B_\Omega u_\Omega \quad (16b)$$

$$(16c)$$

Note que \mathcal{N}_0 é o conjunto dos estados $\zeta \in \mathcal{Z}$ que são desacoplados da saída (vide Cap. 3). Portanto $\widehat{C}\zeta(t) \equiv 0$ e assim $C\bar{x}(t) \equiv 0$. Em particular teremos $Cx(t) = C(z(t) + \bar{x}(t)) = Cz(t)$. Logo

$$y(t) = Cz(t) \quad (16d)$$

Assim, as equações do sistema (16) não são afetadas pela perturbação, isto é, coincidem com as equações (10). Portanto se construirmos um compensador baseado em observador como no esquema da figura 10, teremos que a estabilidade da malha fechada garante que $\lim z(t) \rightarrow 0$ e portanto a regulação é atingida. Note que $x(t)$ não tende necessariamente para zero, já que $x = z + \bar{x}$, e $\bar{x} \in \ker C$ pode ser não nulo. \square

Note que as condições da proposição anterior implicam que a resposta permanente provocada pela perturbação na saída pode ser cancelada pelo efeito de uma entrada adequada.

Proposição 4 Seja $(\tilde{C}_\Omega, \tilde{A}_\Omega)$ um modelo da da referência $r(t)$ (vide (6)). Assuma que as hipóteses da proposição anterior são satisfeitas para o modelo (C_Ω, A_Ω) da perturbação. Defina o par (\bar{C}, \bar{A}) dado por

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & \tilde{C}_\Omega \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A & BC_\Omega & 0 \\ 0 & A_\Omega & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_\Omega \end{bmatrix}$$

Note que as matrizes \bar{C} e \bar{A} representam transformações lineares $\bar{C} : \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_\Omega \oplus \mathcal{X}_\Omega \rightarrow \mathcal{Y}$ e $\bar{A} : \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_\Omega \oplus \mathcal{X}_\Omega \rightarrow \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_\Omega \oplus \mathcal{X}_\Omega$. Seja $P_2 : \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_\Omega \oplus \mathcal{X}_\Omega \rightarrow \mathcal{X}_\Omega$ a projeção canônica definida na proposição anterior. Seja \mathcal{N}_0 o espaço não-observável do par (\bar{C}, \bar{A}) . Assuma que $P_2 \mathcal{N}_0 = \mathcal{X}_\Omega$. Então um compensador com a topologia da figura 10 é solução simultânea do problema de rastreamento/regulação.

Prova: Suponha inicialmente que $r(t) \equiv 0$. Usando o resultado anterior, segue-se que a regulação é satisfeita em malha fechada. Pela linearidade do sistema, é suficiente mostrar que o problema de rastreamento é solucionado quando $w(t) \equiv 0$.

Para $w(t) \equiv 0$ as equações do sistema aumentado ficam:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BC_\Omega x_{\Omega_1} + Bu(t) \quad (17a)$$

$$\dot{x}_{\Omega_1}(t) = A_\Omega x_{\Omega_1}(t) + B_\Omega u_\Omega(t) \quad (17b)$$

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (17c)$$

$$= r(t) - Cx(t) \quad (17d)$$

Seja $r(t)$ obedecendo à hipótese H2. Assim existe uma solução \bar{x}_{Ω_2} da equação autônoma

$$\dot{x}_{\Omega_2}(t) = A_\Omega x_{\Omega_2}(t) \quad (18)$$

tal que

$$r(t) = \tilde{C}_\Omega \bar{x}_{\Omega_2}(t) \quad (19)$$

Seja $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}_\Omega \oplus \mathcal{X}_\Omega$. Do fato de $P_2 \mathcal{N}_0 = \mathcal{X}_\Omega$, segue-se que podemos tomar um vetor $\zeta_0 = (x^0, x_{\Omega_1}^0, x_{\Omega_2}^0)^T$ em \mathcal{Z} tal que $x_{\Omega_2}^0 = \bar{x}_{\Omega_2}(t_0)$ e $\zeta_0 \in \mathcal{N}_0$. Note agora que, da forma bloco triangular de \bar{A} , temos que $P_2 e^{\bar{A}t} = \bar{x}_{\Omega_2}(t)$. Seja $\zeta(t) = (\bar{x}(t), \bar{x}_{\Omega_1}(t), \bar{x}_{\Omega_2}(t)) = e^{\bar{A}t} \zeta_0$. Desenvolvendo a equação $\dot{\zeta}(t) = \bar{A} \zeta(t)$ obtemos:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + BC_\Omega \bar{x}_{\Omega_1} \quad (20a)$$

$$\dot{\bar{x}}_{\Omega_1} = A_\Omega \bar{x}_{\Omega_1} \quad (20b)$$

$$\dot{\bar{x}}_{\Omega_2} = \tilde{A}_\Omega \bar{x}_{\Omega_2} \quad (20c)$$

De (19) e (17c), teremos:

$$e(t) = Cx - \tilde{C}_\Omega \bar{x}_{\Omega_2} \quad (20d)$$

Seja $z = x + \bar{x}$, $z_{\Omega_1} = x_{\Omega_1} + \bar{x}_{\Omega_1}$, e $z_{\Omega_2} = x_{\Omega_2} + \bar{x}_{\Omega_2}$. Derivando no tempo z , z_{Ω_1} e z_{Ω_2} e usando (17), (19) e (20) obtemos:

$$\dot{z} = Az + BC_{\Omega}z_{\Omega_1} + Bu \quad (21a)$$

$$\dot{z}_{\Omega_1} = A_{\Omega}z_{\Omega_1} + B_{\Omega}u_{\Omega} \quad (21b)$$

$$(21c)$$

Por outro lado, sabemos do fato de $\zeta_0 \in \mathcal{N}_0$ ser desacoplado da saída, que $\bar{C}\zeta(t) \equiv 0$. Portanto, $C\bar{x}(t) + \tilde{C}_{\Omega}\bar{x}_{\Omega_2}(t) \equiv 0$. Assim:

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - Cx(t) \\ &= \tilde{C}_{\Omega}\bar{x}_{\Omega_2} - Cx(t) \\ &= \tilde{C}_{\Omega}\bar{x}_{\Omega_2} - C(z(t) - \bar{x}(t)) \\ &= \underbrace{(C\bar{x}(t) + \tilde{C}_{\Omega}\bar{x}_{\Omega_2})}_0 - Cz(t) \end{aligned}$$

Logo

$$e(t) = -Cz(t) \quad (21d)$$

Assim, as equações do sistema (21) não são afetadas pela perturbação, isto é, coincidem com as equações (10) com $w(t) = 0$. Portanto se construirmos um compensador baseado em observador da figura 10 teremos que a estabilidade da malha fechada garante que $\lim z(t) \rightarrow 0$ e portanto a regulação é atingida. Note que $x(t)$ não tende necessariamente para zero, já que $x = z - \bar{x}$, e \bar{x} pode ser não nulo. \square

Cap. 8 – Controle Ótimo Linear Quadrático

Visão Geral do Capítulo.

Neste capítulo apresentaremos o problema de *Controle Ótimo Linear Quadrático (LQR)* de forma bastante simplificada e elementar. Iniciaremos o capítulo por uma motivação para o estudo de tal problema e em seguida apresentaremos a definição precisa do LQR (Linear Quadratic Regulator). A solução do problema através da equação algébrica de Riccati será brevemente discutida. Terminaremos o capítulo discutindo as diversas propriedades interessantes que a realimentação estabilizante associada à solução da equação de Riccati possui. Tais propriedades fazem do LQR uma política de determinação de realimentações estabilizantes usada em aplicações práticas.

Uma observação importante a respeito das escolhas didáticas deste capítulo é discutida a seguir¹. Normalmente, a equação de Riccati surge naturalmente através de técnicas de *cálculo das variações* (ou do *Princípio do Máximo de Pontryagin*). Tais técnicas no entanto são um pouco avançadas para um curso de graduação, envolvendo aspectos de análise funcional. Assim nos propusemos apenas a apresentar as idéias principais do LQR de maneira elementar e adotamos uma forma simplificada para a apresentação da teoria, com a vantagem de que toda ela é baseada em argumentos mais elementares (que não envolvem análise funcional). A desvantagem de nossa abordagem é certamente a forma artificial que a equação de Riccati é introduzida.

1 Apresentação do Problema e Motivação

Consideraremos um sistema de controle da forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{1}$$

Onde o vetor de entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Vimos no capítulo 5 que, se o sistema for controlável, é possível impor pólos livremente através de realimentação de estado. Se o sistema não for controlável, é possível pelo menos impor pólos na parte controlável do sistema. Do ponto de vista das aplicações práticas, a imposição de pólos pode gerar leis de controle que desperdiçam energia, já que nenhum critério de otimização é acrescentado ao problema. Podemos dizer que, determinada a realimentação F que impõe um certo conjunto de pólos, a única característica que podemos garantir que o sistema em malha fechada possui é o conjunto de pólos impostos. Não há nada que garanta que outra lei de controle em malha fechada não forneça o desempenho desejado, mas com uma economia de energia considerável.

¹A apresentação aqui adotada foi sugerida pelo Prof. Felipe Miguel Pait.

É claro também que os atuadores possuem limitações físicas e que leis de controle mal projetadas podem levar o sistema a saturações e, como consequência, instabilidades e outros efeitos indesejáveis causados por estas não linearidades. O controle ótimo linear quadrático produz realimentações estabilizantes que otimizam um funcional que leva em conta duas ponderações:

- A integral de uma medida quadrática do estado.
- A integral de uma medida quadrática da entrada.

Para isso definimos o seguinte problema de controle ótimo.

Problema de Controle Ótimo Linear Quadrático: Dada a condição inicial x_0 para o sistema, queremos encontrar a entrada $u^*(\cdot)$ que minimiza o funcional:

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (2)$$

sujeito à restrição (1). Em (2), as matrizes Q, R são simétricas, $Q \geq 0$ e $R > 0$.

Observação : Note que se existir uma função controle $u^*(\cdot)$ que minimize o funcional (2), estaremos gerando uma entrada que leva o sistema para a origem e ainda leva em conta ponderações e compromissos entre a energia despendida pelos “esforços” de controle. Para que (2) seja minimizado é preciso que a norma de $x(t)$ seja a menor possível através da aplicação do menor esforço possível $u(t)$. \diamond

2 Teoria (simplificada)

Nesta seção apresentamos a teoria simplificada do regulador linear quadrático. Iniciamos a apresentação com as propriedades da equação de Riccati. A prova do resultado a seguir pode ser encontrada em bons livros textos de teoria de controle.

Lema 1 *Seja a equação (denominada equação de Riccati)*

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3)$$

onde A, B são as matrizes do sistema (1) e Q, R são simétricas $Q \geq 0$ e $R > 0$. Se o sistema for estabilizável então existe uma única solução P simétrica definida positiva para (3).

Exemplo 1 Para o sistema escalar

$$\dot{x} = ax + bu$$

a equação (3) é da forma

$$2ap + p^2 b^2 r^{-1} + q = 0$$

- Se $b \neq 0$ então $p = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 4b^2 r^{-1} q}}{2b^2 r^{-1}}$. Note que há uma solução positiva e outra negativa.
- Se $b = 0$ então só há solução positiva se $a > 0$.
- Se $b = 0$ e $a \geq 0$ não há solução positiva (esta última condição é equivalente à não estabilizabilidade do sistema).

♣

Teorema 1 *Suponha que (A, B) é estabilizável. Seja P a única solução positiva definida da equação de Riccati (3). A realimentação de estado:*

$$u^* = -K^* x$$

onde $K^* = -R^{-1} B^T P$, é uma realimentação estabilizante que minimiza o funcional (2) restrito à (1).

Prova: (Esboço.) Seja P a única solução positiva definida da equação de Riccati dada por (3) e considere

$$V(x) = x^T P x. \quad (4)$$

Então

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu) \\ &= x^T (A^T P + PA)x + u^T B^T P x + x^T P B u \end{aligned}$$

Usando o fato de que P é solução da eq. (3) teremos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T (-P B R^{-1} B^T P - Q)x + u^T B^T P x + \\ &+ x^T P B u + u^T R u - u^T R u \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} (R^{-1} B^T P x + u)^T R (R^{-1} B^T P x + u) &= \\ u^T B^T P x + x^T P B u + x^T P B R^{-1} B P x^T + u^T R u \end{aligned}$$

Integrando em $[0, T]$ vamos obter

$$\begin{aligned} V(x(T)) - V(x(0)) &= - \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt + \\ &+ \int_0^T (R^{-1} B^T P x + u)^T R (R^{-1} B^T P x + u) dt \end{aligned}$$

Da última equação :

$$V(x(T)) + \int_0^T [(x^T Q x + u^T R u)] dt = V(x_0) + \|R^{-1} B^T P x + u\|_Q^2 \quad (5)$$

Para minimizar o lado direito da equação (5) para um x_0 fixado é necessário e suficiente que

$$u^* = -R^{-1} B^T P x = -K^* x. \quad (6)$$

Para mostrar que o controle ótimo é uma realimentação estabilizante (pelo menos para $Q > 0$), observe que, aplicando-se u^* teremos

$$\int_0^T [(x^T Q x + u^T R u)] dt = -V(x(T)) + V(x_0) \leq V(x_0)$$

Passando ao limite $T \mapsto \infty$ para que a integral imprópria do lado esquerdo seja limitada, é preciso que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\|_Q^2 = 0$, mostrando a estabilidade do sistema em malha fechada com o controle estabilizante.

Para mostrar que

$$u^* = -K^* x$$

minimiza o funcional (2) restrito a (1) basta usarmos a convergência exponencial de $x(t)$ para $u = u^*$. \square

Observação : Vantagens do controle ótimo:

- Robustez : Margem de ganho = $[1/2, \infty)$ e Margem de fase $\pi/3$ radianos.
- Permite a geração de realimentações de estado estabilizantes que levam em conta o “custo do controle”.
- Permitem uma certa ação “controlada” sobre os pólos de malha fechada. Para isso é preciso entender os princípios de escolha das matrizes de ponderação Q e R do teorema 2.
- Algoritmos de solução da equação de Riccati numericamente estáveis e implementados no MATLAB são disponíveis.

\diamond

Teorema 2 *Suponha que o sistema possui apenas uma entrada e denote a matriz de ponderação do controle por r (escalar). Então valem as seguintes propriedades assintóticas para os autovalores do sistema em malha fechada com a realimentação ótima:*

- *Seja $a + jb \in \mathbb{C}$, onde $a > 0$. Chama-se de reflexo estável o complexo $-a + jb$. Quando $r \rightarrow \infty$ (alto custo do controle) os pólos da malha fechada tendem para os pólos estáveis da malha aberta e para os reflexos estáveis dos pólos instáveis da malha aberta.*
- *Seja $Q = c^T c$, onde c é um vetor linha. Suponha que a função de transferência do sistema (1) com saída $y = cx$ tenha n pólos e p zeros. Assuma que p_1 zeros estão no semi-plano esquerdo e p_2 no direito. Quando $r \rightarrow 0$, teremos que $n - p$ pólos*

de malha fechada tendem para infinito numa configuração “Butterworth”, p_1 pólos tendem para os zeros “estáveis” e p_2 pólos tendem para o reflexo estável dos zeros estáveis.

Observação : Para calcularmos uma injeção da saída K estabilizante (ganho de um observador) podemos proceder da seguinte maneira:

- Determinamos o sistema dual $A_1 = A^T$ e $B_1 = C^T$.
- Para uma escolha adequada de Q, R determinamos uma realimentação de estados ótima F_1 de maneira que $A_1 + B_1 F_1$ tenha diversas propriedades desejáveis.
- Fazemos $K = -F_1^T$.

◇

3 Exemplo

Considere o sistema mecânico sem atrito da figura 1 cujas equações são :

$$m\ddot{q} + kq = u(t)$$

onde $k = 1 \text{ N/m}$ e m é a massa em Kg . Seja $x_1 = q$ e $x_2 = \dot{q}$. Escrevendo as equações na forma de estado obtemos:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Calculando a solução $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$ para

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e $R = \rho > 0$, vamos obter :

$$p_{11} = \frac{\rho}{\omega} \sqrt{2(1 + 1/\rho)(\sqrt{1 + 1/\rho} - 1)} \quad (7)$$

$$p_{12} = \frac{-\rho + \rho\sqrt{1 + 1/\rho}}{\omega^2} \quad (8)$$

$$p_{22} = \frac{\rho}{\omega^3} \sqrt{2(\sqrt{1 + 1/\rho} - 1)} \quad (9)$$

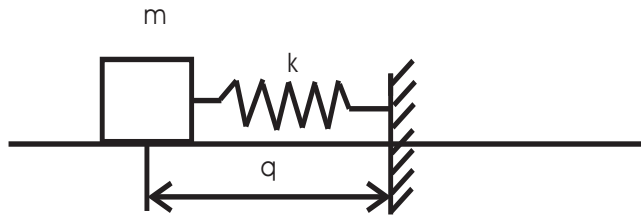


Figura 1: *Sistema mecânico massa-mola sem atrito ($k=1$, $m=1$).*

Obtemos ainda o controle ótimo $u^* = -(k_1 \ k_2)x$ onde

$$k_1 = \sqrt{1 + 1/\rho} - 1$$

$$k_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{2(\sqrt{1 + 1/\rho} - 1)}$$

Os autovalores de malha fechada são :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\omega}{2} \sqrt{2(\sqrt{1 + 1/\rho} - 1)} \pm j \frac{\omega}{2} \sqrt{2(\sqrt{1 + 1/\rho} - 1) + 4}$$

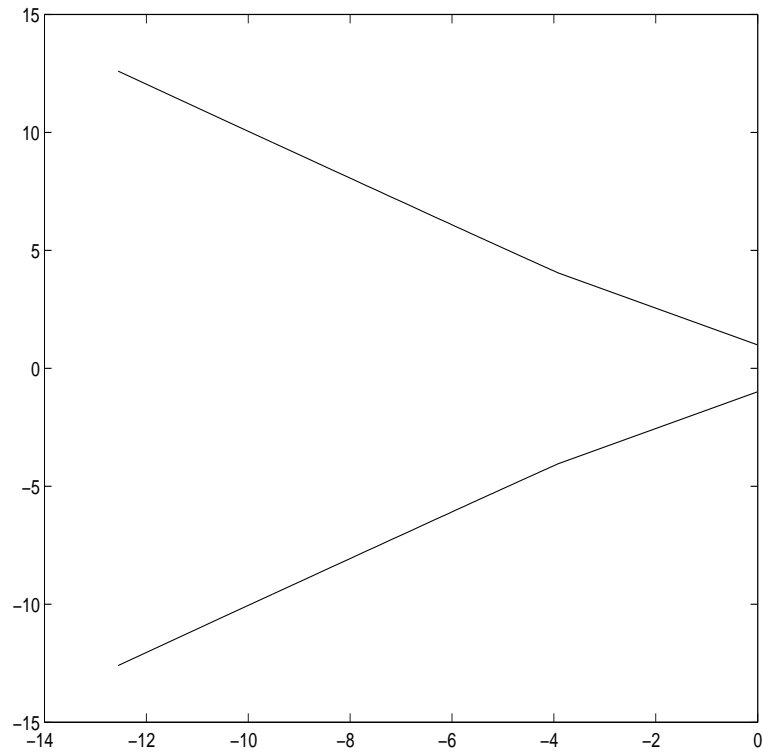


Figura 2: Autovalores de $A + BK$ em função de ρ . Note que quando $\rho \rightarrow \infty$, então os pólos tendem para os pólos de malha aberta ($\pm j\omega$). Quando $\rho \rightarrow 0$ então os pólos tendem para infinito na configuração Butterworth de segunda ordem. A parte real é a abscissa e a imaginária é a ordenada.

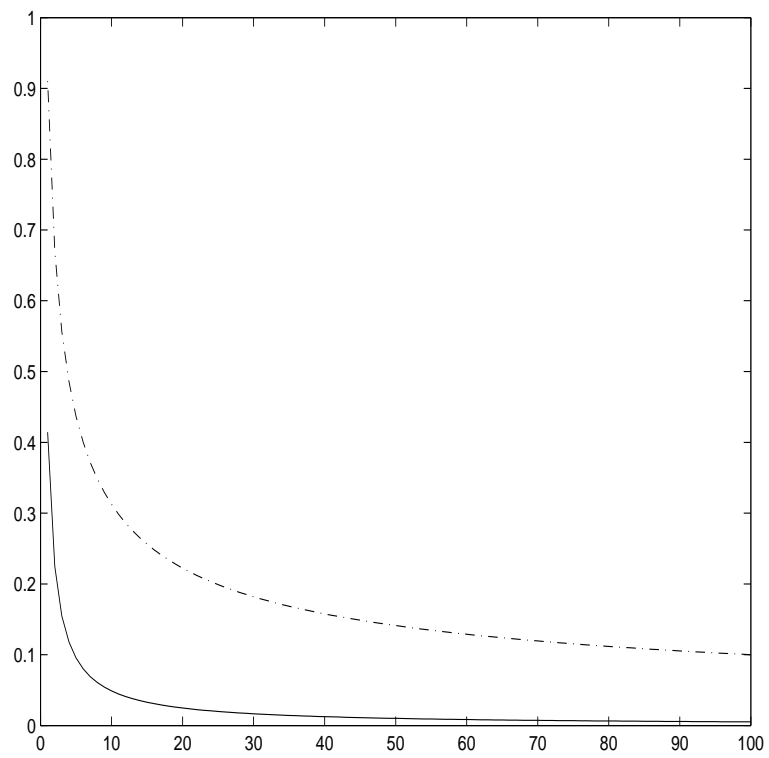


Figura 3: Ganhos k_1 (linha cheia) e k_2 (linha tracejada) em função de ρ .