Cap. 3 - Observabilidade e desacoplamento da Saída

Visão geral do capítulo

No capítulo 2 mostramos que a controlabilidade está relacionada com o menor subespaço A-invariante que contém a imagem de B. Mostramos que um sistema pode ser decomposto em uma parte controlável e uma outra parte "desligada da entrada".

Neste capítulo trabalharemos com os conceitos de desacoplamento da saída e de observabilidade. O primeiro é a propriedade de uma condição inicial provocar uma saída nula para um sistema sem entrada. O segundo é a capacidade de deduzirmos o estado de um sistema a partir da informação de sua saída e da entrada aplicada.

Mostraremos que a observabilidade e o desacoplamento da saída estão diretamente relacionados ao maior subespaço A-invariante contido em $\ker C$, que chamaremos de $\mathcal{N}_0$, ou ainda de *subespaço não-observável.*

Mostraremos que $\mathcal{N}_0$ é o núcleo de uma matriz denominada matriz de observabilidade. Mostraremos que um sistema é observável se e somente se $\mathcal{N}_0$ é o subespaço nulo. Obteremos uma decomposição do sistema em uma *parte observável* e uma *parte não-observável*, esta última sendo completamente desconectada da saída. Ressaltamos que tais propriedades são duais das obtidas no capítulo 2.

1 Desacoplamento da saída

Nesta seção definiremos a propriedade de desacoplamento da saída, que é uma propriedade "estado$\rightarrow$saída" (dual da controlabilidade).

Seja o sistema (sem entrada)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) && \text{(1a)} \\ y(t) &= Cx(t) && \text{(1b)} \\ x(t_0) &= x_0,\, t \leq t_0 && \text{(1c)} \end{aligned}$$

onde $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ e $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, são transformações lineares, $\mathcal{X}$, e $\mathcal{Y}$ são espaços vetoriais de dimensão n e l, respectivamente.

Definição 1 *Dizemos que um estado x_0, onde $x_0 \in \mathcal{X}$, é desacoplado da saída para o sistema (1), se $x(t_0) = x_0$ implicar em $y(t) = Cx(t) = 0$ para todo $t \geq t_0$. O conjunto dos estados x_0 desacoplados da saída será denotado por $\mathcal{N}_0$.*

Teorema 1 *O subespaço dos estados desacoplados da saída é dado por $\mathcal{N}_0$ tal que:*

$$\mathcal{N}_0 = \ker \mathcal{O} = \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Para mostrar o teorema 1 precisamos do seguinte lema:

Lema 1 *O subespaço vetorial* $\ker \mathcal{O}$ *é A-invariante.*

Prova: Seja $v \in \ker \mathcal{O}$. Vamos mostrar que $Av \in \ker \mathcal{O}$ ou seja que $\mathcal{O}Av = 0$. De fato, para isto note que:

$$\mathcal{O}Av = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix} v$$

Mas do fato de $\mathcal{O}v = 0$ segue-se que $CA^k v = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$. Lembremos do capítulo 2 que, pelo teorema de Cayley-Hamilton, $A^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$, onde a_i são os coeficientes do polinômio característico de A. Portanto $CA^n v = C \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i v = \sum_{i=0}^{n-1} a_i CA^i v = 0$. □

Prova: (do teorema 1) Seja x_0 um estado desacoplado da saída. Então pela definição 1 teremos :

$$Ce^{A(t-t_0)} x_0 = 0, \; \forall t \geq t_0$$

e portanto derivando a equação acima sucessivas vezes, tem-se

$$\frac{d^k}{dt^k}(Ce^{A(t-t_0)} x_0) = CA^k e^{A(t-t_0)} x_0 = 0, \; \forall t \geq t_0.$$

em particular, para $t = t_0$, segue-se que

$$CA^k x_0 = 0, \;\; k = 0, 1, \ldots, n-1$$

e assim $x_0 \in \ker \mathcal{O}$.

Para mostrar que todo estado de $\ker \mathcal{O}$ é desacoplado da saída, suponha $x_0 \in \ker \mathcal{O}$ e tome uma base em que os primeiros k vetores formam uma base de $\ker \mathcal{O}$. Nesta base, como $\ker \mathcal{O}$ é A-invariante e $\ker \mathcal{O} \subset \ker C$ (mostrar), segue-se que o sistema se reescreve como:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}^1 \\ \dot{z}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix} \tag{3a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix} \tag{3b}$$

A forma da matriz $\tilde{A}$ em (3a) se deve a A-invariância de $\ker \mathcal{O}$. Por outro lado a forma da matriz $\tilde{C}$ em (3b) se deve ao fato de $\ker \mathcal{O} \subset \ker C$.

Note que x_0, quando escrito na nova base, toma a forma $x_0 = \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix}$, onde $x_0 \in \ker \mathcal{O}$ se e somente se $z^2 = 0$. Note que, de (3a), a dinâmica de z^2 é dada por

$$z^2(t) = A_{22} z^2.$$

Logo com a condição inicial $x_0 \in \ker \mathcal{O}$, teremos que $z^2(t) \equiv 0$. De (3b), segue-se que $y(t)$ é identicamente nulo. Portanto, x_0 é desacoplado da saída. $\square$

2 Observabilidade

Seja o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) && \text{(4a)} \\ y(t) &= Cx(t) && \text{(4b)} \\ x(t_0) &= x_0,\ t \leq t_0 && \text{(4c)} \end{aligned}$$

Nesta seção introduziremos o conceito de observabilidade para sistemas na forma (4). Veremos que a observabilidade é a propriedade de poder deduzir o estado de um sistema a partir do conhecimento da entrada aplicada $u(\cdot)$ e a saída obtida $y(\cdot)$ deste sistema. Fica implícito nesta definição que também conhecemos perfeitamente o sistema em termos de suas matrizes (C, A, B) da equação (4).

Definição 2 *Dizemos que um sistema na forma (4) é observável se o estado inicial $x(t_0)$ puder ser determinado a partir do conhecimento de $u(t)$ e $y(t)$ no intervalo $[t_0, t_0 + T]$.*

Observação :
(i) Se x_0 é conhecido então $x(t)$ pode ser determinado através da equação (6) do cap.2. Assim a definição acima poderia ser mudada para
Dizemos que um sistema na forma (4) é observável se o estado inicial $x(t)$ no intervalo $[t_0, T + t_0]$ puder ser determinado a partir do conhecimento de $u(t)$ e $y(t)$ no mesmo intervalo.
(ii) Como mostraremos que a observabilidade é uma propriedade que depende apenas de A e C, dizemos apenas que o par (C, A) é (ou não) observável ao invés de dizermos que o sistema é (ou não) observável.
(iii) Pela invariância no tempo, não há perda de generalidade em considerar $t_0 = 0$. $\diamondsuit$

Teorema 2 *Seja $\mathcal{N}_0 = \ker \mathcal{O}$. O par (C, A) é observável se e somente se $\mathcal{N}_0 = \{0\}$ (espaço nulo).*

Lema 2 *Dado o sistema (C, A) dado por (4), considere o sistema dual*

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u$$

onde $A_1 = A'$ e $B_1 = C'$. Então o posto da matriz de controlabilidade de (A_1, B_1) é igual a dimensão do espaço de estados se e somente se $\ker \mathcal{O} = \{0\}$*, onde $\mathcal{O}$ a matriz de observabilidade construída a partir de (C, A) (vide (2)).*

Prova: Basta notar que a transposta da matriz de controlabilidade de (A_1, B_1) é a matriz

$$\mathcal{C}_1' = \begin{bmatrix} B_1' \\ B_1' A_1' \\ \vdots \\ B_1'(A_1')^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}$$

portanto o posto de $\mathcal{C}_1$ é pleno de linha se e somente se o posto de $\mathcal{O}$ for pleno de coluna, isto é, se e somente se $\ker \mathcal{O} = \{0\}$. □

Prova: (do teorema 2) Provemos inicialmente que $\mathcal{N}_0 = \{0\}$ implica em (C, A) observável. Considere a matriz

$$V(T) = \int_0^T e^{tA'} C' C e^{tA} dt. \tag{5}$$

A matriz $V(T)$ é denominada *Grammiano de Observabilidade*. Note que $V(T)$ coincide com o grammiano de controlabilidade do sistema dual (A_1, B_1). Pelo lema 2 e o lema 1 do Cap. 2, segue-se que $V(T)$ é uma matriz simétrica positiva definida , sendo portanto invertível.

Por outro lado teremos:

$$y(t) = Ce^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \tag{6}$$

portanto, multiplicando ambos os lados de (6) por $e^{tA'}C'$, integrando no intervalo $[0, T]$ e isolando o termo dependente de x_0 do lado direito, teremos:

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^T e^{tA'} C' C e^{tA} dt \right\} x_0 &= \int_0^T e^{tA'} C' \left\{ y(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \right\} dt && \text{(7a)} \\ &= \omega \left(y(\cdot), u(\cdot), A, B, C \right) && \text{(7b)} \end{aligned}$$

Note que para conhecermos $\omega(y(\cdot), u(\cdot), A, B, C)$ e $V(T)$ é preciso conhecer o sistema (A, B, C) e também sua entrada e sua saída num intervalo $[0, T]$. Multiplicando-se a equação (7b) em ambos os lados por $V(T)^{-1}$ obtemos:

$$x_0 = V(T)^{-1} \omega \left(y(\cdot), u(\cdot), A, B, C \right)$$

mostrando que $\mathcal{N}_0 = \{0\}$ implica em que o sistema seja observável.

Mostremos agora que o sistema ser observável implica em $\mathcal{N}_0 = \{0\}$. Para isso suponha por absurdo que existe $\bar{x} \neq 0$ tal que $\bar{x} \in \mathcal{N}_0$. Assim existem x_0^1 e x_0^2 distintos e tais que $x_0^1 - x_0^2 = \bar{x} \in \mathcal{N}_0$. Considere agora as soluções de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de (4) obtidas respectivamente a partir das condições iniciais $x(0) = x_0^1$ e $x(0) = x_0^2$ a partir da mesma entrada $u(\cdot)$ aplicada. Segue-se que

$$
\begin{aligned}
y_1(t) - y_2(t) &= C(x_1(t) - x_2(t)) \\
&= \left[Ce^{At}x_0^1 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right] - \left[Ce^{At}x_0^2 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right] \\
&= Ce^{At}x_0^1 - Ce^{At}x_0^2 \\
&= Ce^{At}\left(x_0^1 - x_0^1\right) \\
&= Ce^{At}\bar{x} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Note que a última igualdade da seqüência de equações acima é decorrente do fato de $\bar{x}$ ser desacoplado da saída e portanto $Ce^{At}\bar{x}$ é identicamente nulo.

Do raciocínio acima, concluímos que os estados x_0^1 e x_0^2 são indistinguíveis, pois saídas idênticas são obtidas a partir destas condições iniciais através da aplicação de uma mesma entrada. É impossível decidir, a partir do conhecimento da saída e da entrada, se a condição inicial adotada foi x_0^1 ou x_0^2. Portanto, se $\mathcal{N}_0 \neq \{0\}$, o sistema não é observável.

$\square$

Observação : Pode-se mostrar que $\mathcal{N}_0 = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i$ e que $\mathcal{N}_0$ é o maior A-invariante contido em $\ker C$. Em outras palavras, se $\mathcal{V}$ é um subespaço A-invariante e $\mathcal{V} \subset \ker C$ então $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}_0$ (mostre). Na teoria de sistemas é usual denominar N_0 de *subespaço não-observável* e denotá-lo por $\langle \ker C | A \rangle$. $\diamondsuit$

O seguinte resultado pode ser demonstrado:

Corolário 1 *As seguintes afirmativas são equivalentes:*
(i) (C, A) *é observável.*
(ii) A matriz de observabilidade

$$
\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}
$$

possui posto $n = \dim \mathcal{X}$*, pleno de coluna.*
(ii) $\mathcal{N}_0 = \ker \mathcal{O} = \{0\}$.
(iv) A matriz de observabilidade $\mathcal{O}$ *tem colunas independentes, ou equivalentemente, a transformação linear* $\mathcal{O}$ *é injetiva.*

(v) O sistema dual (A', C') é controlável.
(vi) A matriz $[sI - A \;\; C]$ possui posto $n = \dim \mathcal{X}$ para todo $s \in \sigma(A)$ (para todo $s \in \mathbb{C}$).
(vii) $\ker [sI - A] \cap \ker C = \{0\}$ *para todo $s \in \sigma(A)$ (para todo $s \in \mathbb{C}$).*
(viii) A matriz A não possui autovetores contidos no $\ker C$ *(critério de Hautus). Em outras palavras, se h é autovetor de A então $Ch \neq 0$.*

Observação : Do que foi visto acima, se um sistema não for observável, podemos sempre escrever as matrizes do sistema em uma nova base de $\mathcal{X}$ em que os primeiros k vetores formem uma base de $\mathcal{N}_0$. Nesta base, devido ao fato de $\mathcal{N}_0$ ser A-invariante e $\mathcal{N}_0 \subset \ker C$, segue-se que o sistema (4) toma a forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}^1(t) \\ \dot{z}^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1(t) \\ z^2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \tag{8a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1(t) \\ z^2(t) \end{bmatrix} \tag{8b}$$

A equação (8) sugere a seguinte decomposição do sistema em partes observável e não-observável:

$$\text{(Parte não-observável)} \qquad \dot{z}^1(t) = A_{11} z^1(t) + A_{12} z^2(t) + B_1 u(t)$$

$$\text{(Parte observável)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z}^2(t) & = & A_{22} z^2(t) + B_2 u(t) \\ y & = & C_2 z^2(t) \end{array} \right.$$

Note que a saída é completamente desconectada da parte não-observável. Note que A_{11}, A_{12}, B_1 são componentes da parte não observável e C_2, A_{22}, B_2 é denominado subsistema observável. A matriz A_{12} representa um acoplamento entre a parte observável e a parte não-observável. $\diamondsuit$

A figura abaixo representa esquematicamente o conteúdo da última observação: