Cap. 2 — Controlabilidade

Paulo Sergio PEREIRA DA SILVA

Escola Politécnica–PTC–USP

Controle Multivariável

Desafios do Capítulo 2

- Dois desafios serão resolvidos.
- O primeiro desafio é controlar totalmente um sistema mecânico flexível. Queremos levá-lo de um ponto de equilíbrio para outro através de uma entrada adequada. Este desafio está relacionado à controlabilidade.
- O segundo desafio é controlar parcialmente um sistema mecânico. Queremos controlar o centro de massa de um sistema mecânico flexível sem fazê-lo vibrar. Este desafio está relacionado ao controle da parte controlável de um sistema.
- A teoria permitirá a solução destes desafios.

Desafios do Capítulo 2

- Dois desafios serão resolvidos.
- O primeiro desafio é controlar totalmente um sistema mecânico flexível. Queremos levá-lo de um ponto de equilíbrio para outro através de uma entrada adequada. Este desafio está relacionado à controlabilidade.
- O segundo desafio é controlar parcialmente um sistema mecânico. Queremos controlar o centro de massa de um sistema mecânico flexível sem fazê-lo vibrar. Este desafio está relacionado ao controle da parte controlável de um sistema.
- A teoria permitirá a solução destes desafios.

Desafios do Capítulo 2

- Dois desafios serão resolvidos.
- O primeiro desafio é controlar totalmente um sistema mecânico flexível. Queremos levá-lo de um ponto de equilíbrio para outro através de uma entrada adequada. Este desafio está relacionado à controlabilidade.
- O segundo desafio é controlar parcialmente um sistema mecânico. Queremos controlar o centro de massa de um sistema mecânico flexível sem fazê-lo vibrar. Este desafio está relacionado ao controle da parte controlável de um sistema.
- A teoria permitirá a solução destes desafios.

Desafios do Capítulo 2

- Dois desafios serão resolvidos.
- O primeiro desafio é controlar totalmente um sistema mecânico flexível. Queremos levá-lo de um ponto de equilíbrio para outro através de uma entrada adequada. Este desafio está relacionado à controlabilidade.
- O segundo desafio é controlar parcialmente um sistema mecânico. Queremos controlar o centro de massa de um sistema mecânico flexível sem fazê-lo vibrar. Este desafio está relacionado ao controle da parte controlável de um sistema.
- A teoria permitirá a solução destes desafios.

Objetivos teóricos do Capítulo 2

- Veremos que controlabilidade é uma propriedade entrada→estado, sendo portanto dependente somente das matrizes (A, B) da representação de estado. Se um sistema é controlável, todos os estados são alcançáveis a partir de qualquer condição inicial pela aplicação de uma entrada adequada.
- Fica implícito na teoria dada no capítulo que, se um estado é alcançável a partir da origem num tempo T_1, onde $T_1 > 0$, então tal estado é alcançável num tempo T_2 positivo qualquer.
- Veremos que um sistema é controlável se e somente se o posto da matriz de controlabilidade é igual à dimensão do estado.
- Mesmo quando o sistema não for controlável, o conjunto dos estados alcançáveis a partir da origem coincide com a imagem da matriz de controlabilidade.
- Neste caso (não controlabilidade) o sistema pode ser decomposto em partes controlável e não controlável.

Objetivos teóricos do Capítulo 2

- Veremos que controlabilidade é uma propriedade entrada$\rightarrow$estado, sendo portanto dependente somente das matrizes (A, B) da representação de estado. Se um sistema é controlável, todos os estados são alcançáveis a partir de qualquer condição inicial pela aplicação de uma entrada adequada.
- Fica implícito na teoria dada no capítulo que, se um estado é alcançável a partir da origem num tempo T_1, onde $T_1 > 0$, então tal estado é alcançável num tempo T_2 positivo qualquer.
- Veremos que um sistema é controlável se e somente se o posto da matriz de controlabilidade é igual à dimensão do estado.
- Mesmo quando o sistema não for controlável, o conjunto dos estados alcançáveis a partir da origem coincide com a imagem da matriz de controlabilidade.
- Neste caso (não controlabilidade) o sistema pode ser decomposto em partes controlável e não controlável.

Objetivos teóricos do Capítulo 2

- Veremos que controlabilidade é uma propriedade entrada→estado, sendo portanto dependente somente das matrizes (A, B) da representação de estado. Se um sistema é controlável, todos os estados são alcançáveis a partir de qualquer condição inicial pela aplicação de uma entrada adequada.
- Fica implícito na teoria dada no capítulo que, se um estado é alcançável a partir da origem num tempo T_1, onde $T_1 > 0$, então tal estado é alcançável num tempo T_2 positivo qualquer.
- Veremos que um sistema é controlável se e somente se o posto da matriz de controlabilidade é igual à dimensão do estado.
- Mesmo quando o sistema não for controlável, o conjunto dos estados alcançáveis a partir da origem coincide com a imagem da matriz de controlabilidade.
- Neste caso (não controlabilidade) o sistema pode ser decomposto em partes controlável e não controlável.

Objetivos teóricos do Capítulo 2

- Veremos que controlabilidade é uma propriedade entrada$\rightarrow$estado, sendo portanto dependente somente das matrizes (A, B) da representação de estado. Se um sistema é controlável, todos os estados são alcançáveis a partir de qualquer condição inicial pela aplicação de uma entrada adequada.
- Fica implícito na teoria dada no capítulo que, se um estado é alcançável a partir da origem num tempo T_1, onde $T_1 > 0$, então tal estado é alcançável num tempo T_2 positivo qualquer.
- Veremos que um sistema é controlável se e somente se o posto da matriz de controlabilidade é igual à dimensão do estado.
- Mesmo quando o sistema não for controlável, o conjunto dos estados alcançáveis a partir da origem coincide com a imagem da matriz de controlabilidade.
- Neste caso (não controlabilidade) o sistema pode ser decomposto em partes controlável e não controlável.

Objetivos teóricos do Capítulo 2

- Veremos que controlabilidade é uma propriedade entrada$\rightarrow$estado, sendo portanto dependente somente das matrizes (A, B) da representação de estado. Se um sistema é controlável, todos os estados são alcançáveis a partir de qualquer condição inicial pela aplicação de uma entrada adequada.
- Fica implícito na teoria dada no capítulo que, se um estado é alcançável a partir da origem num tempo T_1, onde $T_1 > 0$, então tal estado é alcançável num tempo T_2 positivo qualquer.
- Veremos que um sistema é controlável se e somente se o posto da matriz de controlabilidade é igual à dimensão do estado.
- Mesmo quando o sistema não for controlável, o conjunto dos estados alcançáveis a partir da origem coincide com a imagem da matriz de controlabilidade.
- Neste caso (não controlabilidade) o sistema pode ser decomposto em partes controlável e não controlável.

DESAFIO 1 DO CAPÍTULO

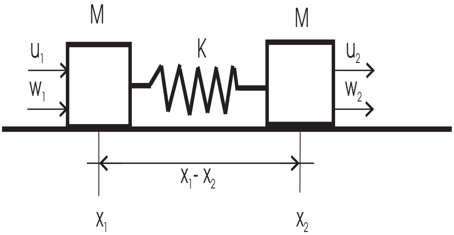

Figura: *Sistema mecânico considerado neste capítulo.*

- A mola é ideal, tem comprimento nulo em repouso ($x_1 = x_2$)
- $u_1(t)$, $u_2(t)$ são entradas (forças de controle).
- $w_1(t)$ e $w_2(t)$ são nulas (perturbações).
- As massas são idênticas e iguais a M.
- posições dadas por $x_1(t)$ e $x_2(t)$.
- A constante da mola é K.

- A mola é ideal, tem comprimento nulo em repouso ($x_1 = x_2$)
- $u_1(t)$, $u_2(t)$ são entradas (forças de controle).
- $w_1(t)$ e $w_2(t)$ são nulas (perturbações).
- As massas são idênticas e iguais a M.
- posições dadas por $x_1(t)$ e $x_2(t)$.
- A constante da mola é K.

- A mola é ideal, tem comprimento nulo em repouso ($x_1 = x_2$)
- $u_1(t)$, $u_2(t)$ são entradas (forças de controle).
- $w_1(t)$ e $w_2(t)$ são nulas (perturbações).
- As massas são idênticas e iguais a M.
- posições dadas por $x_1(t)$ e $x_2(t)$.
- A constante da mola é K.

- A mola é ideal, tem comprimento nulo em repouso ($x_1 = x_2$)
- $u_1(t)$, $u_2(t)$ são entradas (forças de controle).
- $w_1(t)$ e $w_2(t)$ são nulas (perturbações).
- As massas são idênticas e iguais a M.
- posições dadas por $x_1(t)$ e $x_2(t)$.
- A constante da mola é K.

- A mola é ideal, tem comprimento nulo em repouso ($x_1 = x_2$)
- $u_1(t)$, $u_2(t)$ são entradas (forças de controle).
- $w_1(t)$ e $w_2(t)$ são nulas (perturbações).
- As massas são idênticas e iguais a M.
- posições dadas por $x_1(t)$ e $x_2(t)$.
- A constante da mola é K.

- A mola é ideal, tem comprimento nulo em repouso ($x_1 = x_2$)
- $u_1(t)$, $u_2(t)$ são entradas (forças de controle).
- $w_1(t)$ e $w_2(t)$ são nulas (perturbações).
- As massas são idênticas e iguais a M.
- posições dadas por $x_1(t)$ e $x_2(t)$.
- A constante da mola é K.

Mostre que

$$
\begin{aligned}
M\ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) &= u_1 + w_1 && \text{(1a)} \\
M\ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) &= u_2 + w_2 && \text{(1b)} \\
& && \text{(1c)}
\end{aligned}
$$

PRIMEIRO DESAFIO: Aplicar forças $u_1(t)$ e $u_2(t)$ no sistema mecânico de modo a levar o sistema de $x_1(0) = x_2(0) = x_0$ com velocidades iniciais nulas (repouso com mola no equilíbrio) até $x_1(T) = x_2(0) = x_f$ com velocidades finais nulas (repouso com mola no equilíbrio). É possível resolver este problema aplicando força só em $u_1(t)$?

RECORDAR É VIVER

SISTEMA LINEAR

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2a}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2b}$$

$$x(t_0) = x_0,\ t \leq t_0 \tag{2c}$$

- $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $D : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ são transformações lineares,
- $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{Y}$ são espaços vetoriais de dimensão n, m, l, respectivamente.
- O espaço vetorial $\mathcal{X}$ é chamado espaço de estados ($x(t)$ é o vetor de estado no instante t),
- $\mathcal{Y}$ é o espaço de saídas ($y(t)$ é o vetor de saídas no instante t) e
- $\mathcal{U}$ é o espaço das entradas ($u(t)$ é o vetor de entradas no instante t).

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1(t), \ldots, x_n(t))' \\ u(t) &= (u_1(t), \ldots, u_m(t))' \\ y(t) &= (y_1(t), \ldots, y_l(t))' \end{aligned}$$

- $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $D : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ são transformações lineares,
- $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{Y}$ são espaços vetoriais de dimensão n, m, l, respectivamente.
- O espaço vetorial $\mathcal{X}$ é chamado espaço de estados ($x(t)$ é o vetor de estado no instante t),
- $\mathcal{Y}$ é o espaço de saídas ($y(t)$ é o vetor de saídas no instante t) e
- $\mathcal{U}$ é o espaço das entradas ($u(t)$ é o vetor de entradas no instante t).

$$
\begin{aligned}
x(t) &= (x_1(t), \ldots, x_n(t))' \\
u(t) &= (u_1(t), \ldots, u_m(t))' \\
y(t) &= (y_1(t), \ldots, y_l(t))'
\end{aligned}
$$

- $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $D : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ são transformações lineares,
- $\mathcal{X}, \mathcal{U}$ e $\mathcal{Y}$ são espaços vetoriais de dimensão n, m, l, respectivamente.
- O espaço vetorial $\mathcal{X}$ é chamado espaço de estados ($x(t)$ é o vetor de estado no instante t),
- $\mathcal{Y}$ é o espaço de saídas ($y(t)$ é o vetor de saídas no instante t) e
- $\mathcal{U}$ é o espaço das entradas ($u(t)$ é o vetor de entradas no instante t).

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1(t), \ldots, x_n(t))' \\ u(t) &= (u_1(t), \ldots, u_m(t))' \\ y(t) &= (y_1(t), \ldots, y_l(t))' \end{aligned}$$

- $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $D : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ são transformações lineares,
- $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{Y}$ são espaços vetoriais de dimensão n, m, l, respectivamente.
- O espaço vetorial $\mathcal{X}$ é chamado espaço de estados ($x(t)$ é o vetor de estado no instante t),
- $\mathcal{Y}$ é o espaço de saídas ($y(t)$ é o vetor de saídas no instante t) e
- $\mathcal{U}$ é o espaço das entradas ($u(t)$ é o vetor de entradas no instante t).

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1(t), \ldots, x_n(t))' \\ u(t) &= (u_1(t), \ldots, u_m(t))' \\ y(t) &= (y_1(t), \ldots, y_l(t))' \end{aligned}$$

- $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $D : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ são transformações lineares,
- $\mathcal{X}, \mathcal{U}$ e $\mathcal{Y}$ são espaços vetoriais de dimensão n, m, l, respectivamente.
- O espaço vetorial $\mathcal{X}$ é chamado espaço de estados ($x(t)$ é o vetor de estado no instante t),
- $\mathcal{Y}$ é o espaço de saídas ($y(t)$ é o vetor de saídas no instante t) e
- $\mathcal{U}$ é o espaço das entradas ($u(t)$ é o vetor de entradas no instante t).

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1(t), \ldots, x_n(t))' \\ u(t) &= (u_1(t), \ldots, u_m(t))' \\ y(t) &= (y_1(t), \ldots, y_l(t))' \end{aligned}$$

SISTEMA AUTÔNOMO (SEM ENTRADA)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{3a}$$
$$x(t_0) = x_0,\ t \geq t_0 \tag{3b}$$

- Considere, sem perda de generalidade que $t_0 = 0$. Sabemos que a (única) solução do sistema acima para $x(0) = x_0$ é dada por

$$x(t) = e^{At}x_0$$

- A matriz e^{At} é chamada de exponencial da matriz A e definida pela série absolutamente convergente :

$$e^{At} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + At^2/2! + At^3/3! + \dots$$

SISTEMA AUTÔNOMO (SEM ENTRADA)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (3a)$$
$$x(t_0) = x_0,\ t \geq t_0 \quad (3b)$$

- Considere, sem perda de generalidade que $t_0 = 0$. Sabemos que a (única) solução do sistema acima para $x(0) = x_0$ é dada por

$$x(t) = e^{At} x_0$$

- A matriz e^{At} é chamada de exponencial da matriz A e definida pela série absolutamente convergente :

$$e^{At} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + At^2/2! + At^3/3! + \dots$$

Proposição

As seguintes afirmativas são verdadeiras para toda transformação linear $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, para todos os $x, x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ e para todos os $t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$:

(i) $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$.

(ii) $e^{A(t_1+t_2)}x = e^{At_1}e^{At_2}x$.

(iii) $e^{At}(x_1 + x_2) = e^{At}x_1 + e^{At_2}x_2$.

(iv) Se $AB = BA$ *então* $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$.

(v) $\mathcal{L}\left(e^{At}\right) = (sI - A)^{-1}$ *(onde* $\mathcal{L}(f(t))$ *é a transformada de Laplace de* $f(t)$*).*

(vi) $e^{A't} = (e^{At})'$ *(a exponencial da transposta é a transposta da exponencial).*

RESPOSTA LIVRE, FORÇADA E COMPLETA

- Seja o sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) &\quad (4a)\\
y(t) &= Cx(t) + Du(t) &\quad (4b)\\
x(t_0) &= x_0,\ t \leq t_0 &\quad (4c)
\end{aligned}
$$

- A resposta completa do sistem é dada por:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau &\quad (5a)\\
&= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau &\quad (5b)
\end{aligned}
$$

RESPOSTA LIVRE, FORÇADA E COMPLETA

- Seja o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & (4a) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) & (4b) \\ x(t_0) &= x_0,\ t \leq t_0 & (4c) \end{aligned}$$

- A resposta completa do sistem é dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A\tau} Bu(t-\tau)d\tau & (5a) \\ &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau & (5b) \end{aligned}$$

- MATRIZ DE TRANSFERENCIA
- SIGNIFICADO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA
- LOUSA!

- MATRIZ DE TRANSFERENCIA
- SIGNIFICADO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA
- LOUSA!

- MATRIZ DE TRANSFERENCIA
- SIGNIFICADO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA
- LOUSA!

Definição de Controlabilidade

Sejam $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ transformações lineares onde $\dim \mathcal{X} = n$ e $\dim \mathcal{U} = m$. Considere o sistema

$$\begin{aligned} x(t) &= Ax(t) + Bu(t) && \text{(6a)} \\ x(t_0) &= x_0,\ t \leq t_0 && \text{(6b)} \end{aligned}$$

Definição

No sistema (6) dizemos que x_1 é alcançável num tempo T a partir da origem (ou simplesmente alcançável) se existir uma entrada $u : [t_0, T] \to \mathcal{U}$ admissível, tal que a solução da equação (6), com $x(t_0) = x_0$, obedeça a $x(T) = x_1$. Um sistema é controlável se todo x_1 for alcançável a partir de todo x_0.

PARA UM SISTEMA CONTROLÁVEL, EXISTE UMA ENTRADA QUE LEVA O SISTEMA DE UMA CONDIÇÃO INICIAL (QUALQUER) PARA UMA CONDIÇÃO FINAL DESEJADA (QUALQUER)

Critério de Controlabilidade

Seja a matriz

$$\mathcal{C} = \left[B \; AB \; \ldots \; A^{n-1} B \right]$$

(matriz de controlabilidade).

Teorema

Um sistema linear é controlável se e somente se o posto de $\mathcal{C}$ for igual a $n = \dim \mathcal{X}$.

Definição

Seja $T > 0$ fixado. Definimos o Grammiano de controlabilidade $V(T)$ dada por:

$$V(T) = \int_0^T e^{tA} B B' e^{tA'} \, dt \tag{7}$$

Teremos que $V(T)$ assim definida é uma matriz $n \times n$ (mostre).

Teorema

Assuma que o posto da matriz de controlabilidade é igual a $n = \dim \mathcal{X}$. Então $V(T)$ é invertível e a entrada:

$$u(t) = -B' e^{(T-t)A'} V(T)^{-1} (e^{TA} x_0 - x_1)$$

leva o sistema de $x(0) = x_0$ até $x(T) = x_1$.

Definição

Seja $T > 0$ fixado. Definimos o Grammiano de controlabilidade $V(T)$ dada por:

$$V(T) = \int_0^T e^{tA} B B' e^{tA'} \, dt \tag{7}$$

Teremos que $V(T)$ assim definida é uma matriz $n \times n$ (mostre).

Teorema

Assuma que o posto da matriz de controlabilidade é igual a $n = \dim \mathcal{X}$. Então $V(T)$ é invertível e a entrada:

$$u(t) = -B' e^{(T-t)A'} V(T)^{-1} (e^{TA} x_0 - x_1)$$

leva o sistema de $x(0) = x_0$ até $x(T) = x_1$.

SOLUÇÃO DO PRIMEIRO DESAFIO (PARTE DO TRABALHO 1)

- Lembre das equações do sistema mecânico:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) &= u_1 + w_1 \\ M\ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) &= u_2 + w_2 \end{aligned}$$

- Adotaremos $M = 1$ Kg e $K = 1$ N/m.
- Convertendo as equações do sistema mecânico para forma de estado teremos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

SOLUÇÃO DO PRIMEIRO DESAFIO (PARTE DO TRABALHO 1)

- Lembre das equações do sistema mecânico:

$$
\begin{aligned}
M\ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) &= u_1 + w_1 \\
M\ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) &= u_2 + w_2
\end{aligned}
$$

- Adotaremos $M = 1$ Kg e $K = 1$ N/m.
- Convertendo as equações do sistema mecânico para forma de estado teremos:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx + Du
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DO PRIMEIRO DESAFIO (PARTE DO TRABALHO 1)

- Lembre das equações do sistema mecânico:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) &= u_1 + w_1 \\ M\ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) &= u_2 + w_2 \end{aligned}$$

- Adotaremos $M = 1$ Kg e $K = 1$ N/m.
- Convertendo as equações do sistema mecânico para forma de estado teremos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

SOLUÇÃO DO PRIMEIRO DESAFIO (PARTE DO TRABALHO 1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K/M & 0 & K/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K/M & 0 & -K/M & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/M & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/M \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DO PRIMEIRO DESAFIO (PARTE DO TRABALHO 1)

- $$x_0 = \begin{bmatrix} x_{1_0} \\ 0 \\ x_{1_0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$x_f = \begin{bmatrix} x_{1_f} \\ 0 \\ x_{2_f} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$u(t) = -B' e^{(T-t)A'} V(T)^{-1} (e^{TA} x_0 - x_1)$$

SOLUÇÃO DO PRIMEIRO DESAFIO (PARTE DO TRABALHO 1)

- $$x_0 = \begin{bmatrix} x_{1_0} \\ 0 \\ x_{1_0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$x_f = \begin{bmatrix} x_{1_f} \\ 0 \\ x_{2_f} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$u(t) = -B'e^{(T-t)A'}V(T)^{-1}(e^{TA}x_0 - x_1)$$

SOLUÇÃO DO PRIMEIRO DESAFIO (PARTE DO TRABALHO 1)

- $$x_0 = \begin{bmatrix} x_{1_0} \\ 0 \\ x_{1_0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$x_f = \begin{bmatrix} x_{1_f} \\ 0 \\ x_{2_f} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$u(t) = -B' e^{(T-t)A'} V(T)^{-1} (e^{TA} x_0 - x_1)$$

ENUNCIADO FORMAL DO PRIMEIRO DESAFIO:

(a) Simule no MATLAB o controle projetado para levar o sistema de uma posição de equilíbrio $x_0 \in \mathbb{R}^4$ em t=0 (velocidades nulas) até outra posição de equilíbrio $x_f \in \mathbb{R}^4$ para $t = T_f$.

(b) Repita a simulação anterior para condições iniciais e finais não nulas das velocidades.

(c) Para todas as simulações, mostre os resultados pedidos no intervalo $[0, 3T_f/2]$, aplicando entrada nula para $t > T_f$. Forneça os gráficos de $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ e de $\phi(t) = \|x_f - x(t)\|$.

(d) Comente os resultados encontrados em cada simulação.

MATLAB !

FUNK DO CONTROLE (RUIM PACA)

`https://www.youtube.com/watch?v=JqfTfccNVgI`

COLTRANE COMO INSPIRAÇÃO (BEM MELHOR)

`https://www.youtube.com/watch?v=YHVarQbNAwU`

DESAFIO 2 DO CAPÍTULO

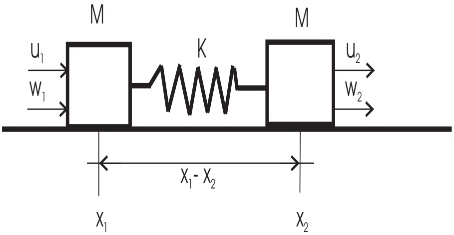

Figura: *Sistema mecânico considerado neste capítulo.*

$$
\begin{aligned}
M\ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) &= u_1 + w_1 && \text{(8a)} \\
M\ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) &= u_2 + w_2 && \text{(8b)}
\end{aligned}
$$

- Queremos controlar apenas as coordenadas do centro de massa $z_1(t) = \frac{x_1(t)+x_2(t)}{2}$.
- Queremos que as forças de controle não influenciem a dinâmica da elongação da mola $z_2(t) = \frac{x_1(t)-x_2(t)}{2}$.

- Queremos controlar apenas as coordenadas do centro de massa $z_1(t) = \frac{x_1(t)+x_2(t)}{2}$.
- Queremos que as forças de controle não influenciem a dinâmica da elongação da mola $z_2(t) = \frac{x_1(t)-x_2(t)}{2}$.

ENUNCIADO FORMAL DO SEGUNDO DESAFIO:
(a) Reescreva o modelo (A_1, B_1) do sistema considerando que a sua entrada será $u(t) =$ e que o estado é $z(t) = (z_1(t), \dot{z}_1(t), z_2(t), \dot{z}_2(t))'$. Assuma que $u_1 = u_2 = u$.
(b) Mostre que a dinâmica de $(z_1, \dot{z}_1)$ corresponde à parte controlável e a dinâmica de $(z_2, \dot{z}_2)$ corresponde à parte não controlável.
(c) Construa um controle que leve o sistema de $(z_1(0), \dot{z}_1(0))$ até $(z_1(T_f), \dot{z}_1(T_f))$
arbitrários com condição inicial nula em $(z_2(0), \dot{z}_2(0))$
(d) Simule no MATLAB o controle projetado em (c) para condição inicial nula de $(z_2(0), \dot{z}_2(0))$.
(e) Repita a simulação anterior para condição inicial não nula de $(z_2(0), \dot{z}_2(0))$.
(f) Nos itens (d) e (e) exiba os gráficos de $z_1(t)$ $z_2(t)$ e $u(t)$ no intervalo $[0, 3T_f/2]$, aplicando entrada nula para $t > T_f$.
(g) Comente os resultados encontrados em (d) e (e).