Cap.2. Representação de Estado e Controlabilidade

Visão geral do capítulo

Neste capítulo trataremos o problema da controlabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo. Faremos antes uma breve revisão dos fatos básicos sobre esta classe de sistemas. A questão fundamental a compreender[1] é que o ponto de vista aqui adotado considera que um sistema é um ente geométrico (intrínseco), independente de coordenadas. Tal ponto de vista tem a vantagem de ser mais adequado para o estudo das propriedades estruturais de sistemas lineares tais como controlabilidade e observabilidade. Para poder definir sistemas lineares a partir desta premissa, devemos considerar transformações lineares ao invés de matrizes (vide Capítulo 1).

Veremos que controlabilidade é uma propriedade entrada→estado, sendo portanto dependente somente das matrizes (A, B) da representação de estado. Veremos que um sistema é controlável se e somente se o posto da matriz de controlabilidade é igual à dimensão do estado. Mesmo quando o sistema não for controlável, o conjunto dos estados alcançáveis a partir da origem coincide com a imagem da matriz de controlabilidade. Se um sistema é controlável, todos os estados são alcançáveis a partir de qualquer condição inicial pela aplicação de uma entrada adequada. Fica implícito na teoria dada no capítulo que, se um estado é alcançável a partir da origem num tempo T_1, onde $T_1 > 0$, então tal estado é alcançável num tempo T_2 positivo qualquer.

1 Introdução

Nesta seção faremos uma revisão breve da teoria de sistemas lineares invariantes no tempo dando ênfase aos aspectos estruturais intrínsecos que tendem a ser esquecidos pelas representações matriciais. A palavra "intrínseco" para nós significará alguma propriedade do sistema que não depende da base (sistema de coordenadas) escolhida para representação do sistema.

Consideraremos sistemas da forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1a}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{1b}$$
$$x(t_0) = x_0,\ t \leq t_0 \tag{1c}$$

onde $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $D : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ são transformações lineares, $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{Y}$ são espaços vetoriais de dimensão n, m, l, respectivamente. O espaço vetorial $\mathcal{X}$ é chamado espaço de estados ($x(t)$ é o vetor de estado no instante t), $\mathcal{Y}$ é o espaço de

[1] Sendo a única novidade da revisão com relação aos cursos anteriores.

saídas ($y(t)$ é o vetor de saídas no instante t) e $\mathcal{U}$ é o espaço das entradas ($u(t)$ é o vetor de entradas no instante t). A entrada externa $u(t)$ pertence ao conjunto $\mathbb{U}$ de funções de entrada admissíveis. Por simplicidade vamos supor que $\mathbb{U}$ é o conjunto das funções contínuas por partes de $[t_0, \infty)$ em $\mathcal{U}$. Fixadas bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathcal{X}$, $\{f_1, \dots, f_m\}$ de $\mathcal{U}$ e $\{g_1, \dots, g_l\}$ de $\mathcal{Y}$, o sistema (1) passa a possuir uma descrição matricial representada pelas matrizes A, B, C, D e os vetores coluna

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t))' \\ u(t) &= (u_1(t), \dots, u_m(t))' \\ y(t) &= (y_1(t), \dots, y_l(t))' \end{aligned}$$

representarão respectivamente o vetor de estado, o vetor de entradas e o vetor de saídas escrito nestas bases. Note que a equação (1) pode ser interpretada de forma intrínseca (pelas transformações lineares A, B, C, D agindo em vetores x, y, u) ou de forma matricial (pelas matrizes A,B,C,D multiplicando vetores coluna x, y, u escritos em bases fixadas). A escolha das bases de $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{U}$ em geral não é livre porque as entradas e saídas estão relacionadas respectivamente aos atuadores e sensores do sistema. Embora a escolha da base do espaço de estados $\mathcal{X}$ possa também estar relacionada com grandezas físicas, muitas vezes esta escolha pode "esconder" propriedades estruturais internas do sistema, que poderiam ser reveladas em uma base mais adequada. Assim, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base original de $\mathcal{X}$ e $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ é a nova base em que desejamos escrever o vetor de estado, definimos a matriz T de mudança de base por :

$$T = \begin{bmatrix} \text{matriz dos vetores coluna } \{\eta_1, \dots, \eta_n\} \\ \text{escritos na base } \{e_1, \dots, e_n\} \end{bmatrix}$$

Note que a matriz T transforma vetores escritos na base $\{e_1, \dots, e_n\}$ em vetores escritos na base $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$. Tal propriedade é representada no diagrama abaixo :

$$\text{Vetores na base } \textbf{original } \{e_1, \dots, e_n\} \leftarrow \boxed{\text{T}} \leftarrow \text{Vetores na base } \textbf{nova } \{\eta_1, \dots, \eta_n\}.$$

Assim, se A, B, C, D são as matrizes do sistema escritas na base $\{e_1, \dots, e_n\}$, as novas matrizes $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$, obtidas a partir da transformação de base

$$x = Tz \tag{2}$$

serão dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= T^{-1}AT && \text{(3a)} \\ \tilde{B} &= T^{-1}B && \text{(3b)} \\ \tilde{C} &= CT && \text{(3c)} \\ \tilde{D} &= D && \text{(3d)} \end{aligned}$$

e as novas equações matriciais do sistema são dadas por :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) && \text{(4a)} \\ y(t) &= \tilde{C}z(t) + \tilde{D}u(t) && \text{(4b)} \\ z(t_0) &= z_0,\ t \geq t_0 && \text{(4c)} \end{aligned}$$

Note que as equações acima representam **o mesmo sistema (1) (em uma base diferente)** embora seja usual dizer que eles sejam similares (emprestando da álgebra linear o termo usado para as matrizes A e $\tilde{A}$ que obedeçam a relação $\tilde{A} = T^{-1}AT$).

1.1 O sistema autônomo

Considerando apenas o sistema autônomo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) && (5a) \\ x(t_0) &= x_0,\, t \geq t_0 && (5b) \end{aligned}$$

Considere, sem perda de generalidade que $t_0 = 0$. Sabemos que a (única) solução do sistema acima para $x(0) = x_0$ é dada por

$$x(t) = e^{At}x_0$$

onde $e^{A}t$ é chamada de exponencial da matriz A e definida pela série absolutamente convergente :

$$e^{At} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + At^2/2! + At^3/3! + \ldots$$

A exponencial de matriz possui diversas propriedades interessantes, algumas delas constantes na proposição abaixo :

Proposição 1 *As seguintes afirmativas são verdadeiras para toda transformação linear $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, para todos os $x, x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ e para todos os $t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$:*
(i) $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$.
(ii) $e^{A(t_1+t_2)}x = e^{At_1}e^{At_2}x$.
(iii) $e^{At}(x_1 + x_2) = e^{At}x_1 + e^{At_2}x_2$.
(iv) Se $AB = BA$ *então* $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$.
(v) $\mathcal{L}\left(e^{At}\right) = (sI - A)^{-1}$ *(onde* $\mathcal{L}(f(t))$ *é a transformada de Laplace de* $f(t)$*).*
(vi) $e^{A't} = (e^{At})'$ *(a exponencial da transposta é a transposta da exponencial).*

1.2 As Respostas Livre e Forçada

A resposta livre do sistema (1) é a porção da resposta devida às suas condições iniciais. A resposta livre corresponde exatamente à solução da equação autônoma (5). A resposta forçada é o efeito da entrada no sistema, admitindo-se condições iniciais nulas. Por superposição e linearidade, a resposta completa corresponde à soma da resposta livre e forçada. Assim a solução $x(t)$ de (1) com a condição inicial $x(0) = x_0$ é dada por :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau && (6a) \\ &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau && (6b) \end{aligned}$$

note que a resposta forçada corresponde a uma integral de convolução da matriz de respostas ao impulso $H(t) = e^{At}B$ com a função entrada $u(\cdot)$. Note que a componente $h_{ij}(t)$ da matriz $H(t)$ é obtida da resposta ao impulso da componente x_i do estado pela aplicação do impulso unitário na entrada u_j, assumindo que as outras entradas são nulas. Uma forma fácil de obter a equação acima é através da aplicação de transformadas de Laplace. De fato, aplicando-se esta transformada em ambos os lados de (1) tem-se :

$$\mathcal{L}\left(\dot{x}(t)\right) = \mathcal{L}\left(Ax(t) + Bu(t)\right)$$

Assim, como temos $\mathcal{L}\left(\dot{x}(t)\right) = sX(s) - x_0$, segue-se que:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

e portanto

$$(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$$

e logo:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \tag{7}$$

e em virtude da parte (v) da proposição 1, anti-transformando a equação acima obteremos (6). Note que, para condições iniciais nulas ($x_0 = 0$), segue-se de (1a) e de (7) que:

$$\begin{aligned} Y(s) &= CX(s) + DU(s) \\ &= [C(sI - A)^{-1}B - D]U(s) \\ &= G(s)U(s) \end{aligned}$$

a matriz $G(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]$ é denominada matriz de transferência do sistema. Note que o elemento $g_{ij}(s)$, da i-ésima linha e j-ésima coluna de G(s) representa a função de transferência entre a j-ésima entrada e a i-ésima saída, quando todas as outras entradas u_k são nulas para k diferente de j.

1.3 A-invariância e Dinâmica da Equação Autônoma

Considere uma aplicação linear $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ tal que, para um subespaço $\mathcal{V}$, tenhamos que para todo $v \in \mathcal{V}$ então $Av \in \mathcal{V}$. Tal propriedade é denotada por $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ e neste caso dizemos que o subespaço $\mathcal{V}$ é A-invariante. O exemplo mais simples de um subespaço invariante é o subespaço unidimensional $\mathcal{V}$, gerado por um autovetor v de A. A álgebra linear desenvolve teorias importantes baseadas no conceito de invariância[2]. As nossas aplicações ficam, pelo menos pelo momento, mais restritas ao conteúdo da proposição seguinte :

[2]Por exemplo, a Forma Canônica Racional, e a Forma Canônica de Jordan de uma transformação linear é estreitamente relacionada com subespaços A-invariantes.

Proposição 2 *Seja uma* $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *transformação linear, seja* $\mathcal{V}$ *um subespaço de* $\mathcal{X}$*, assuma que* $\dim(\mathcal{X}) = n$ *e* $\dim(\mathcal{V}) = k$*. Considere uma equação autônoma (5) com condição inicial* $x(t_0) = x_0$*. Então as seguintes afirmativas são equivalentes*
(i) O subespaço $\mathcal{V}$ *é* A*-invariante, isto é ,* $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$*.*
(ii) Se $x_0 \in \mathcal{V}$*, então a solução da equação autônoma (5) é tal que* $x(t) \in \mathcal{V}$ *para todo* $t \in [t_0, \infty)$*.*
(iii) Dada uma base $\mathbb{B} = \{v_1, \ldots, v_k, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n-k}\}$ *de* $\mathcal{X}$ *tais que os primeiros* k *vetores formem uma base de* $\mathcal{V}$*, então quando escrevermos a matriz de* A *na base* $\mathbb{B}$ *vamos obter uma matriz* $\tilde{A}$ *da forma:*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde A_{11} *é uma submatriz* $k \times k$*,* A_{12} *é* $k \times (n-k)$*,* A_{22} *é* $(n-k) \times (n-k)$ *e o zero representa uma submatriz* $(n-k) \times k$ *que é nula.*

Observação : Lembremos que se T é a matriz dos vetores coluna $\{v_1, \ldots, v_k, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n-k}\}$ escritos na base original de $\mathcal{X}$, então $\tilde{A} = T^{-1}AT$. Note também que (i) é uma caracterização geométrica da A-invariância, (ii) é dinâmica e (iii) é matricial. $\diamondsuit$

2 Controlabilidade

Esta seção é dedicada ao estudo da controlabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo.

Existem diversas definições de controlabilidade. A definição que utilizaremos está relacionada com a capacidade de alcançar[3] pontos do espaço de estados pela aplicação de uma entrada adequada. Tal definição é evidentemente uma propriedade "entrada→estado", sendo conhecida na literatura em língua inglesa como "pointwise-controllability", ou controlabilidade ponto-a-ponto.

Sejam $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ transformações lineares onde $\dim \mathcal{X} = n$ e $\dim \mathcal{U} = m$. Considere o sistema

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{8a}$$
$$x(t_0) = x_0,\ t \leq t_0 \tag{8b}$$

Definição 1 *No sistema (8) dizemos que* x_1 *é alcançável num tempo* T *a partir da origem (ou simplesmente alcançável) se existir uma entrada* $u : [t_0, T] \to \mathcal{U}$ *admissível, tal que a solução da equação (8), com* $x(t_0) = x_0$*, obedeça a* $x(T) = x_1$*.*

Denotaremos conjunto dos estados alcançáveis a partir da origem por $\mathcal{R}_0$.

[3] A capacidade de alcançar pontos do espaço de estados é também chamada de alcançabilidade ou atingibilidade

Teorema 1 *O espaço $\mathcal{R}_0$ alcançável a partir da origem é dado por:*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_0 &= \operatorname{Im} B + A \operatorname{Im} B + \ldots + A^{n-1} \operatorname{Im} B \\ &= \operatorname{Im} [B \; AB \; \ldots \; A^{n-1}B]\end{aligned}$$

Observação : Durante toda a demonstração do teorema vamos denotar

$$\mathcal{R} = \operatorname{Im} \left[B \; AB \; \ldots \; A^{n-1}B\right]$$

porque ainda não sabemos que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0$, onde $\mathcal{R}_0$ é o conjunto dos estados alcançáveis a partir da origem. A matriz

$$\mathcal{C} = \left[B \; AB \; \ldots \; A^{n-1}B\right]$$

será denominada matriz de controlabilidade.

Sem perda de generalidade, seja $t_0 = 0$. Assumindo que a condição inicial x_0 é nula, de (6) temos que :

$$x(T) = \int_0^T e^{A\tau} B u(T - \tau) d\tau. \tag{9}$$

Para provar o teorema vamos construir uma entrada adequada tal que o estado $x(T)$, dado por (9), seja igual ao estado x_1 que queremos atingir. Para isso necessitaremos do conceito de Grammiano de controlabilidade e de dos lemas a seguir. $\diamondsuit$

Definição 2 *Seja $T > 0$ fixado. Definimos o Grammiano de controlabilidade $V(T)$ dada por:*

$$V(T) = \int_0^T e^{tA} B B' e^{tA'} dt \tag{10}$$

Teremos que $V(T)$ assim definida é uma matriz simétrica (mostre). Mais ainda, valem os lemas a seguir :

Lema 1 *Assuma que[4] $\mathcal{R} = \mathcal{X}$. Então a matriz $V(T)$ é definida positiva (e portanto invertível).*

Prova: *Tome $x \in \mathcal{X}$ arbitrário. Teremos*

$$\begin{aligned}x'V(T)x &= x' \left\{ \int_0^T e^{tA} B B' e^{tA'} dt \right\} x \\ &= \int_0^T x' e^{tA} B B' e^{tA'} x dt \\ &= \int_0^T \left(B' e^{tA'} x\right)' \left(B' e^{tA'} x\right) dt \\ &= \int_0^T \left\| B' e^{tA'} x \right\|^2 dt \geq 0.\end{aligned}$$

[4]Mostre como exercício de álgebra linear que $\mathcal{R} = \mathcal{X}$ se e somente se o posto da matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ for igual a $n = \dim X$.

Portanto $V(T)$ é pelo menos semi-definida positiva. Para mostrar que ela é definida-positiva, suponha que exista $x \neq 0$ tal que $x'V(T)x = 0$. Da continuidade de $\left\|B'e^{tA'}x\right\|^2$ em função de t segue-se que, $\left\|B'e^{tA'}x\right\| = 0$ para todo $t \in [0,T]$. Em particular:

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d^i\left(B'e^{tA'}x\right)}{dt^i}\right|_{t=0} \\ &= B'(A')^i e^{tA'}x\Big|_{t=0},\ i = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

Logo

$$B'(A')^i x\Big|_{t=0} = 0\ i = 1,2,3,\ldots$$

e portanto $x'\mathcal{C} = 0$. Assim as linhas da matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ são linearmente dependentes e o posto de $\mathcal{C}$ não pode ser igual a $n = \dim \mathcal{X}$. □

Lema 2 *Se $\mathcal{R} = \mathcal{X}$, então a entrada $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$u(t) = B'e^{(T-t)A'}V(T)^{-1}x_1$$

faz com que o sistema alcance x_1 num tempo T a partir da origem.

Prova: Substituindo-se a expressão de $u(t)$ em (9) vamos obter :

$$\begin{aligned} x(T) &= \int_0^T e^{A\tau}Bu(T-\tau)d\tau \\ &= \int_0^T e^{A\tau}BB'e^{A'\tau}V(T)^{-1}x_1 d\tau \\ &= \left(\int_0^T e^{A\tau}BB'e^{A'\tau}d\tau\right)V(T)^{-1}x_1 \\ &= V(T)V(T)^{-1}x_1 \\ &= x_1 \end{aligned}$$

□

Lema 3 *O subespaço $\mathcal{R} = \mathrm{Im}\,\mathcal{C} = \mathrm{Im}\ [B\ AB\ \ldots\ A^{n-1}B]$ é A-invariante.*

Prova: O teorema de Cayley-Hamilton nos diz que uma transformação linear anula seu próprio polinômio característico. Em outras palavras, se $\pi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n - (a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)$, então $\pi(A) \doteq A^n - (a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I) = 0$. Em particular temos que A^n é uma combinação linear das potências inferiores à enésima potência de A.

Seja $x \in \mathcal{R}$. Por definição temos que x é uma combinação linear das colunas de $\mathcal{C}$. Em outras palavras, $x = \mathcal{C}\bar{u} =$ para algum $\bar{u} \in \mathcal{U}^n$. Denotando $\bar{u} = (u_0', \ldots, u_{n-1}')'$, teremos que $x = \sum_{j=0}^{n-1} A^j B u_j$. Portanto $Av = \sum_{j=0}^{n-1} A^{j+1} B u_j$. Como A^n é uma combinação linear das potências inferiores à enésima de A, segue-se que Av também é uma combinação linear das colunas de $\mathcal{C}$. $\square$

Prova: (do teorema 1) : Demonstraremos inicialmente que $z \notin \mathcal{R}$ não pode ser alcançado num tempo T a partir da origem para nenhuma entrada aplicada e nenhum $T > 0$. De fato, note que do lema 3 temos que $\mathcal{R}$ é um subespaço A-invariante. Por outro lado da proposição 2 e do fato de $\operatorname{Im} B \subset \mathcal{R}$ segue-se que, numa nova base de $\mathcal{X}$ adaptada a estes subespaços sistema se reescreve como

$$\begin{bmatrix} \dot{z}^1 \\ \dot{z}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Note que dizer que $z \notin \mathcal{R}$ é equivalente a dizer que $z = \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix}$ com $z^2 \neq 0$. Mas a equação dinâmica que rege a porção z^2 do vetor de estado $z(t)$ é a equação autônoma dada por:

$$z^2(t) = A_{22} z^2.$$

Logo com a condição inicial $z(0) = 0$, teremos que $z^2(t) \equiv 0$ e portanto $z \notin \mathcal{R}$ não poderia ser alcançado a partir da origem.

Mostremos agora que $x \in \mathcal{R}$ pode ser alcançado a partir da origem através de uma entrada adequada. Do raciocínio acima vemos que uma condição inicial nula implica em $z^2(t)$ identicamente nulo. Portanto a dinâmica de $z^1(t)$ se reduz ao sistema (A_{11}, B_1) dado por:

$$\dot{z}^1(t) = A_{11} z^1(t) + B_1 u(t)$$

Pelo lema 2 é suficiente mostrar que o sistema (A_{11}, B_1) é controlável (porque aí poderíamos construir a entrada adequada através deste lema).

De fato, isto pode ser mostrado facilmente computando-se a matriz $\mathcal{C}$ na base utilizada no argumento anterior e considerando-se o fato de que:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} A_{11}^k & X \\ 0 & A_{22}^k \end{bmatrix} \tag{11}$$

Assim, vamos obter

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B_1 & A_{11} B_1 & \dots & A_{11}^{n-1} B_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Como o posto de $\mathcal{C}$ coincide com $k = \dim \mathcal{R}$, que por sua vez coincide com o número de linhas (e de colunas) de A_{11}, segue-se que o posto da matriz

$$\mathcal{C}_1 = \begin{bmatrix} B_1 & A_{11} B_1 & \dots & A_{11}^{n-1} B_1 \end{bmatrix}$$

é igual a k. Pelo teorema de Cayley-Hamilton é fácil mostrar que tal posto coincide com o posto da matriz

$$\bar{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} B_1 & A_{11} B_1 & \dots & A_{11}^{k-1} B_1 \end{bmatrix}$$

Note que $\bar{\mathcal{C}}$ é a matriz de controlabilidade do par (A_{11}, B_1). Portanto o par (A_{11}, B_1) obedece as hipóteses do lema 2, como queríamos demonstrar. $\square$

Definição 3 *: Um sistema (A,B) tal que $\mathcal{R}=\mathcal{X}$ é dito* completamente controlável *(ou simplesmente* controlável*). Se (A,B) não for controlável, então (A_{11},B_1) é denominado parte controlável de (A,B).*

O resultado a seguir mostra que um sistema linear controlável (a partir da origem) é controlável a partir de uma condição inicial arbitrária.

Corolário 1 *Num sistema controlável, a entrada $u:[0,T]\to\mathbb{R}$ definida por*

$$u(t)=-B'e^{(T-t)A'}V(T)^{-1}(e^{TA}x_0-x_1)$$

leva o sistema de $x(0)=x_0$ até $x(T)=x_1$

Prova: Exercício.

O resultado seguinte pode ser demonstrado[5]:

Corolário 2 *As seguintes afirmativas são equivalentes:*
(i) O par (A,B) é controlável.
(ii) A matriz $\mathcal{C}=[B\ AB\ \ldots\ A^{n-1}B]$ possui posto $n=\dim\mathcal{X}$ (pleno de linha).
(iii) posto $[sI-A\ \ B]=n$, para todo $s\in\sigma(A)$.
(vi) $\mathrm{Im}\,(sI-A)+ImB=\mathcal{X}$, para todo $s\in\sigma(A)$.
(v) Se $h\in\mathbb{C}^n$ é um autovetor à esquerda de A, isto é, se $h'A=\lambda h'$ com $\lambda\in\mathbb{C}$, então $h'B\neq 0$ (critério de controlabilidade de Hautus).

Observação : Muitas vezes denotamos o espaço alcançável a partir da origem $\mathcal{R}_0$ por $\langle A|\,\mathrm{Im}\,B\rangle$. Mostra-se que $\mathcal{R}_0$ é o menor espaço A-invariante que contém $\mathrm{Im}\,B$. Em outras palavras, se $\mathcal{V}$ é A-invariante e contém $\mathrm{Im}\,B$, então $\mathcal{R}\subset\mathcal{V}$ (exercício). $\diamondsuit$

Observação : Do que foi visto acima, se um sistema (1) não for controlável, podemos sempre escrever as matrizes do sistema em uma nova base de $\mathcal{X}$ em que os primeiros k vetores formem uma base de $\mathcal{R}_0$. Nesta base, devido ao fato de R_0 ser A-invariante e $\mathrm{Im}\,B\subset\mathcal{R}_0$, segue-se que o sistema (1) toma a forma:

$$\begin{bmatrix}\dot z^1(t)\\ \dot z^2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z^1(t)\\ z^2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}u(t) \tag{12a}$$

$$y = \begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z^1(t)\\ z^2(t)\end{bmatrix} \tag{12b}$$

A equação (12) sugere a seguinte decomposição do sistema em partes controlável e não-controlável:

$$\text{(Parte controlável)}\qquad \left\{\begin{array}{rcl}\dot z^1(t) &=& A_{11}z^1(t)+A_{12}z^2(t)+B_1u(t)\\ y &=& C_1z^1+C_2z^2\end{array}\right.$$

$$\text{(Parte não-controlável)}\qquad \dot z^2(t)=A_{22}z^2(t)$$

[5]Aqui $\sigma(A)$ denota o conjunto (com multiplicidade) dos autovalores de A.

Note que a entrada é completamente desconectada da parte não-controlável. Note que A_{11}, A_{12}, B_1 são componentes da parte controlável e A_{22} é a matriz que define a dinâmica da parte não controlável. As matrizes A_{12} e C_2 representam acoplamentos entre as parte não-controlável e a parte controlável. ◇

A figura abaixo representa esquematicamente o conteúdo da última observação: