CAP. I - DESCRIÇÃO DE SISTEMAS

1. Descrição polinomial :

Ao equacionarmos sistemas físicos segundo as leis que os regem, recaímos em sistemas de equações diferenciais que são lineares ou muitas vezes podem ser linearizadas para obtenção de modelos simples dos fenômenos que estamos estudando. Muitas vezes modelos de sistemas econômicos ou biológicos recaem na classe de sistemas diferenciais lineares invariantes no tempo, classe essa que será o objeto de estudo de nosso curso.

Denotaremos por $\boldsymbol{p}$ o operador derivada. Deste modo se $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ é uma função diferenciável então $\boldsymbol{p}f(t) = f'(t) = df(t)/dt$. Por abuso de notação representaremos por $\boldsymbol{p}^{-1}$ ou $1/\boldsymbol{p}$ o operador que associa a $f(t)$ uma função $F(t)$ tal que

$$\boldsymbol{p}^{-1}f(t) = F(t) = \int_0^t f(\tau).d\tau + F_0$$

onde $F(0) = F_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração escolhida. Note que temos sempre $\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^{-1}f(t) = f(t)$, mas em geral $\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{p}f(t) \neq f(t)$, sendo que a igualdade só se verifica quando $F_0 = f(0)$. Assim, $\boldsymbol{p}^{-1}$ não é o operador inverso de $\boldsymbol{p}$.

Consideraremos que $\boldsymbol{p}^n$ é o operador derivada enésima, isto é $\boldsymbol{p}^n f(t) = d^n f(t)/dt^n$. Desta forma, uma equação diferencial linear da forma :

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{df(t)}{dt} + a_n.f(t) = 0$$

Equivale à representação "polinomial" em $\boldsymbol{p}$:

$$(\boldsymbol{p}^n + a_1.\boldsymbol{p}^{n-1} + ... + a_{n-1}.\boldsymbol{p} + a_n)\, f(t) = 0$$

O polinômio $\boldsymbol{p}^n + a_1.\boldsymbol{p}^{n-1} + ... + a_{n-1}.\boldsymbol{p} + a_n$ pode ser considerado como um operador e as soluções da equação diferencial são as funções $f(t)$ que, quando aplicadas a este operador, fornecem a função identicamente nula.

Generalizando esta idéia, podemos representar qualquer sistema diferencial linear por :

$$T(p)\,\xi(t) = U(p)\,u(t) \tag{1.a}$$

$$y(t) = V(p)\,\xi(t) + W(p)\,u(t) \tag{1.b}$$

onde :

$\xi(t)$ = vetor de estado parcial no instante t (dimensão r)

$u(t)$ = vetor de entrada (dimensão m)

$y(t)$ = vetor de saídas (dimensão l)

$T(p)$ = matriz (r x r), polinomial em p , onde det $T(p) \neq 0$.

$U(p)$ = matriz (r x m), polinomial em p

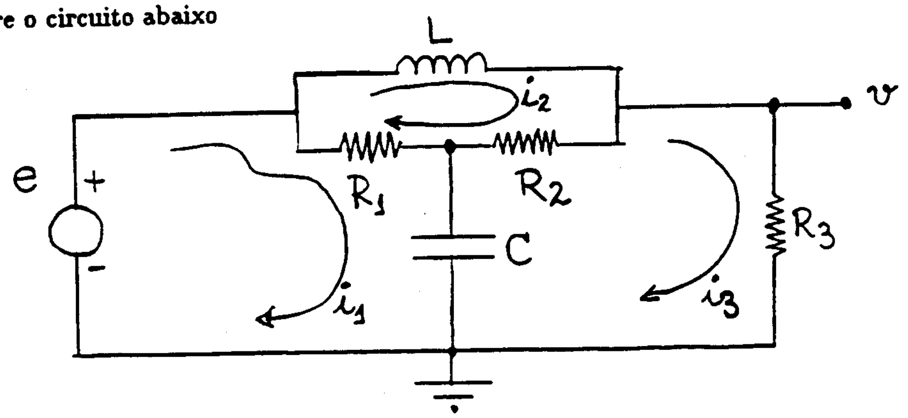
$V(p)$ = matriz (l x r), polinomial em p

$W(p)$ = matriz (l x m), polinomial em p

A quádrupla $\mathcal{S}:\left\{T(p),\ U(p),\ V(p),\ W(p)\right\}$ é denominada descrição polinomial do sistema.

Exemplo 1 :

Considere o circuito abaixo



Equacionando as malhas (correntes de malha i_1, i_2 ,i_3 , corrente no indutor $i_l = i_2$ e carga no capacitor q_c), obtemos :

$$(\,i_1 - i_l\,)R_1 + \frac{q_c}{C} = e(t) \tag{2.a}$$

$$L\frac{di_l}{dt} + i_3 R_3 = e(t) \tag{2.b}$$

$$-\frac{q_c}{C} + (i_3 - i_l)\,R_2 + i_3 R_3 = 0 \tag{2.c}$$

onde

$$q_c(t)=\int_0^t (i_1-i_3)dt \;+\; q_c^0 = p^{-1}(\,i_1-i_3\,)$$

sendo $q_c^0 \;=\; q_c(0)$

$$p q_c = (\,i_1-i_3\,) \tag{2.d}$$

Como vetor de estado parcial vamos escolher $\xi=\begin{bmatrix} q_c \\ i_l \end{bmatrix}$. Para obter a descrição polinomial do sistema, é preciso escrever as correntes i_1 e i_3 em função de q_c e i_l e de suas derivadas. De (2.c) podemos escrever i_3 em função de i_l e q_c.

$$i_3 = \frac{1}{R_2+R_3}\left(\frac{q_c}{C} + i_l\,R_2\right) \tag{2.e}$$

Substituindo (2.e) em (2.d) obtemos

$$i_1 = p q_c + i_3 = p q_c + \frac{1}{R_2+R_3}\left(\frac{q_c}{C} + i_l\,R_2\right) \tag{2.f}$$

Assim podemos substituir (2.e) e (2.f) em (2.a) e em (2.b) obtendo

$$R_1\left(p + \frac{1}{C(R_2+R_3)} + \frac{1}{C\,R_1}\right) q_c + \left(\frac{R_2}{R_2+R_3} - 1\right) R_1\, i_l \;=\; e(t) \tag{3.a}$$

$$\frac{R_3}{C(R_2+R_3)}\; q_c + \left(p\,L + \frac{R_2\,R_3}{R_2+R_3}\right) i_l \;=\; e(t) \tag{3.c}$$

Definimos a saída como $v(t) \;=\; i_3\,R_3$. Assim, de (2.e) teremos :

$$v(t) = \frac{R_3}{R_2+R_3}\left(\frac{q_c}{C} + i_l\,R_2\right) \tag{3.d}$$

Assim, de (3.a), (3.b) e (3.d) a seguinte descrição polinomial para o sistema :

$$T(p)=\begin{bmatrix} p R_1 + \dfrac{R_1+R_2+R_3}{C(R_2+R_3)} & \left(\dfrac{R_2}{R_2+R_3} - 1\right)R_1 \\[2ex] \dfrac{R_3}{C(R_2+R_3)} & \left(p L + \dfrac{R_2\,R_3}{R_2+R_3}\right) \end{bmatrix}$$

$$U(p)=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V(p)=\begin{bmatrix} \dfrac{R_3}{C(R_2+R_3)} & \dfrac{R_2\,R_3}{R_2+R_3} \end{bmatrix}$$

$$W(p)=0$$

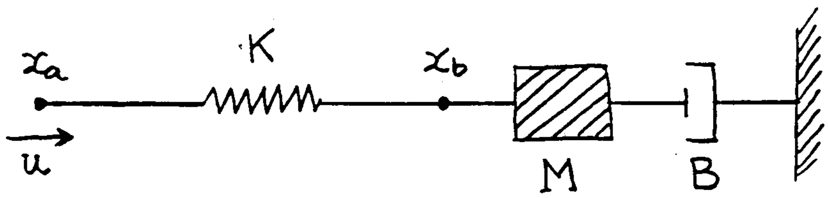
OBS: No exemplo anterior note que o grau do polinômio $\alpha(p) = \det[T(p)]$ é igual a dois. Mostraremos mais tarde que o grau de $\det[T(p)]$ representa a ordem do sistema.

Uma boa escolha das variáveis que irão compor o vetor de estado parcial ξ são as variáveis relacionadas ao armanezamento de energia, como por exemplo a carga de um capacitor, a corrente em um indutor, a elongação de uma mola, etc.. Algumas vezes a má escolha do conjunto de variáveis que compõem o vetor ξ provoca a obtenção de um sistema equivalente do ponto de vista entrada-saída, mas com ordem superior ao que poderíamos obter através de uma escolha mais adequada de ξ. Um princípio básico para ser seguido que garante uma ordem menor é verificar se as grandezas físicas que compõem ξ podem ser medidas instantaneamente no sistema estudado. Por exemplo, a carga no capacitor e a corrente no indutor são instantaneamente mensuráveis. Já a carga que atravessou o indutor até um instante t depende do passado (através da integração da corrente) e portanto não é instantâneamente mensurável.

Exercício :

Para o circuito do exemplo 1, escolha $\xi_1 = \int_0^t i_1\,dt + q_c^0$, $\xi_2 = i_2$, $\xi_3 = \int_0^t i_3\,dt$. Obtenha a descrição polinomial resultante desta escolha do estado parcial e mostre que $\det T(p)$ tem grau três. Compare com o exemplo 1 e teça comentários.

Exemplo 2 : Suponha o sistema mecânico ideal da figura abaixo :



onde: $y=x_a$; u=força externa aplicada. Assim :

$$f = K\,(x_a - x_b) = Mp^2 x_b + Bp x_b$$

Adotando $\xi = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$, teremos a seguinte descrição polinomial para o sistema :

$$T(p) = \begin{bmatrix} K & -K \\ 0 & Mp^2 + Bp \end{bmatrix} \qquad U(p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad W(p) = 0$$

2) Equações de Lagrange

Em casos onde há acoplamentos de natureza física diversa (transdutores) as equações de Lagrange fornecem um método sistematizado para a obtenção das equações diferenciais que regem o sistema estudado.

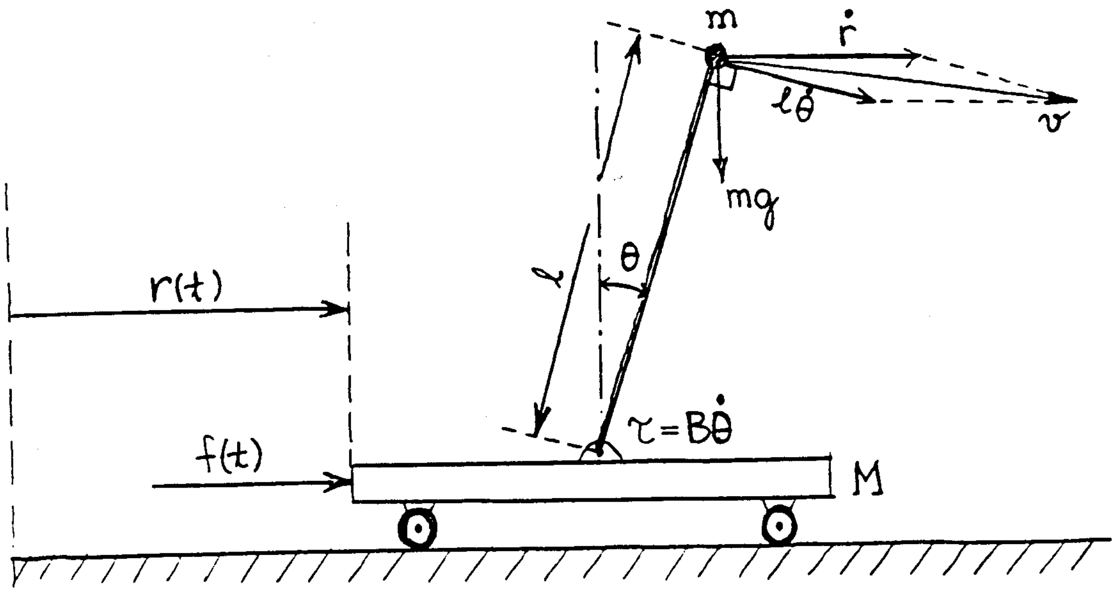
As equações de Lagrange possuem a seguinte forma :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_i$$

onde :

$i = 1, \ldots, n$
n = número de graus de liberdade do sistema
q_i = i-ésima coordenada generalizada
$\dot{q}_i$ = i-ésima velocidade generalizada
F_i = i-ésima força externa generalizada
T = energia cinética total
V = energia potencial total
D = função de dissipação. Definida como metade da taxa com que a energia é dissipada.

Exemplo 3 : Pêndulo invertido Sem atrito



coordenadas generalizadas : θ . r

velocidades generalizadas : $\dot{\theta}$. $\dot{r}$

$$V = m.g.l.\cos\theta$$

$$D = \frac{1}{2}.\ B.\ \dot{\theta}^2$$

Obs: Note que o torque de atrito é $\tau = B\dot{\theta}$ e assim a potência dissipada será dada pelo produto (torque atrito) × (vel. angular)$= B\dot{\theta}^2$.

$$T = \frac{1}{2}M.\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m.v^2$$

Note que :

$$v^2 = \dot{r}^2 + 2l\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2$$

Assim :

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{r}^2 + ml\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Temos :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot r} = (M+m)\dot r + m l \dot\theta \cos\theta \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = m l \dot r \cos\theta + m l^2 \dot\theta$$

$$-\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad -\frac{\partial T}{\partial \theta} = m l \dot r \dot\theta \,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -m g \,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot r} = 0 \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot\theta} = B\dot\theta$$

$$F_1 = f(t) \ , F_2 = 0 .$$

Logo :

$$(M+m)\ddot r + m l \ddot\theta \cos\theta - m\, l\, \dot\theta^2 \mathrm{sen}\,\theta = f(t)$$

$$m l \ddot r \cos\theta + m l^2 \ddot\theta - m g l \,\mathrm{sen}\,\theta + B\dot\theta = 0$$

Linearizando em torno de $\theta = \dot\theta = 0$ e $r = \dot r = 0$, teremos :

$$(M+m)\ddot r + m l \ddot\theta = f(t)$$

$$m l \ddot r + m l^2 \ddot\theta - m g l\, \theta + B\dot\theta = 0$$

As equações acima representam um modelo linearizado do sistema. Considerando $\xi = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}$, $y(t) = \xi(t)$ e $u(t) = f(t)$ teremos a seguinte descrição polinomial :

$$T(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} (M+m)\boldsymbol{p}^2 & m l \boldsymbol{p}^2 \\ m l \boldsymbol{p}^2 & m l^2 \boldsymbol{p}^2 + B\boldsymbol{p} - m g l \end{bmatrix}$$

$$U(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W(\boldsymbol{p}) = 0$$

3) Determinação da Resposta de um Sistema

Nesta seção estaremos preocupados em solucionar o sistema (1.a) para uma entrada u(t) e um conjunto de condições iniciais fornecidas.

$$T(p)\,\xi(t) = U(p)\,u(t) \tag{1.a}$$

$$y(t) = V(p)\,\xi(t) + W(p)\,u(t) \tag{1.b}$$

Lembremos que ξ,u,y possuem dimensão r,m,l , respectivamente.

Assumiremos inicialmente que u(t) é infinitamente diferenciável. Indicaremos por U o espaço das aplicações u(t), com $u:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^m$. Indicaremos por $\overline{U}$ a subclasse de U que se anula para $t<0$. Sem grande perda de generalidade consideraremos entradas u(t) em $\overline{U}$.

Suponha agora que $\xi(t)=0$ para $t<0$. Assim teremos $\xi(0^-)=0$. Nestas condições iremos mostrar no capítulo seguinte que o operador $T(p)$ possui inversa e a resposta do sistema será dada pela resposta forçada $\xi_u(t)$:

$$\xi_u(t) = T^{-1}(p)\; U(p)\,u(t) \tag{2}$$

Mostraremos que $\mathcal{L}(\xi_u(t))=T^{-1}(s)\,U(s)\,\mathcal{L}(u(t))$, onde $\mathcal{L}$ denota a transformada de Laplace. Em outras palavras, tomando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação (2), notamos que para condições iniciais nulas podemos substituir formalmente o operador p pela variável de Laplace s.

Agora suponha u(t) pertencente a $\overline{U}$ mas considere uma condição inicial não nula $\xi(0^-)$. É fácil verificar a partir da linearidade dos operadores que a solução completa de (1.a) será dada por :

$$\xi(t) = \xi_u(t) + \xi_0(t)$$

onde $\xi_0(0^-) = \xi(0^-)$ e

$$T(p)\;\xi_0(t) = 0.$$

Exemplo 4 :

Considere o sistema :

$$(p-1)\,\xi(t) = (p-1)\,u(t)$$

$$y(t) = \xi(t)$$

a) Condições iniciais nulas:

$$\mathcal{L}\Big((p-1)\xi(t)\Big) = \mathcal{L}\Big((p-1)\,u(t)\Big)$$

Então :

$$(s-1)\hat{\xi}(s) = (s-1)\hat{u}(s)$$

portanto

$$\hat{\xi}(s) = \frac{(s-1)}{(s-1)}\hat{u}(s)$$

ou seja $\xi(t)= \xi_u(t) = u(t)$.

b) Condições iniciais não nulas :

$$(p-1)\,\xi_0(t)=0$$

logo

$$\xi_0(t)=\xi(0^-)\,e^t$$

Assim

$$\xi(t) = \xi_u(t)+\xi_0(t)= u(t)+\xi(0^-)\,e^t$$

Exemplo 5:

Considere o sistema :

$$(p^2+ 3p+ 2)\,\xi(t) = u(t)$$

$$y(t)=\xi(t)$$

É fácil verificar que $\xi_0(t) = A\,e^{-t}+ B\,e^{-2t}$, onde $A = 2\,\xi(0^-)+\dot{\xi}(0^-)$ e $B=-\xi(0^-)-\dot{\xi}(0^-)$.

Note que o estado parcial possui dimensão 1. No entanto apenas a condição inicial $\xi(0^-)$ não é suficiente para determinar a resposta do sistema. De fato, é necessário o conhecimento de $\dot{\xi}(0^-)$. Isto motiva a definição de estado (dada na seção seguinte) e justifica a denominação de ξ como "estado parcial".

4) Descrição de Estado

Vimos no exemplo 5 da seção anterior que existe um número mínimo de parâmetros de um sistema, que juntamente com a entrada u(t), determinarão univocamente a sua resposta, isto é, a solução da equação

$$T(\boldsymbol{p})\,\xi(t) \;=\; U(\boldsymbol{p})\,u(t) \tag{1.a}$$

Este número mínimo de parâmetros é exatamente o número mínimo de condições iniciais necessárias para solução da equação homogênea

$$T(\boldsymbol{p})\,\xi_0(t) \;=\; 0 \tag{1.b}$$

Qualquer destes conjuntos de parâmetros é dito ser o ***vetor de estado do sistema*** ou simplesmente ***estado.*** Mostra-se que a dimensão do vetor de estado, denominada ***ordem do sistema***, coincide com o grau do polinômio $\det\big(T(\boldsymbol{p})\big)$ e que diferentes vetores de estado são sempre combinações lineares dos outros.

Assim, se n é a ordem do sistema, fixada uma escolha de um conjunto de variáveis de estado x(t) = $(x_1(t), \dots, x_n(t))'$, mostraremos que as equações (1.a)-(1.b) se reescrevem como :

$$\dot{x}(t) \;=\; A\,x(t) + B\,u(t) \tag{2.a}$$

$$y(t) \;=\; C\,x(t) + D(\boldsymbol{p})\,u(t) \tag{2.a}$$

sendo que o conhecimento da condição inicial $x(0^-) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e da entrada u(t) para $t \geq 0$ é suficiente para determinar completamente a resposta do sistema.

O par de equações (2.a)-(2.b) é denominado ***descrição de estado do sistema.*** Dado um sistema descrito na forma de estado, é imediato obtermos a sua descrição polinomial. De fato, de (2.a)-(2.b) teremos :

$$(\boldsymbol{p}I - A)\,x(t) = B\,u(t)$$

$$y(t) \;=\; C\,x(t) + D(\boldsymbol{p})\,u(t)$$

Logo (2) admite uma descrição polinomial dada por

$$\left\{T(p),\ U(p),\ V(p),\ W(p)\right\}=\left\{(pI-A),\ B,\ C,\ D(p)\right\}$$

No entanto, dado um sistema em descrição polinomial, nem sempre é imediata a obtenção de sua descrição de estado. Um método sistemático de obter esta transformação será mostrado no capítulo 6.

Exemplo 6 :

Considere o sistema :

$$\begin{bmatrix} p+1 & p^3 \\ 0 & p+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

note que $\det T(p) = (p+1)(p+2)$, possuindo portanto grau 2. De fato, a solução do sistema homogêneo recai em uma equação diferencial da forma

$$(p+2)\xi_2=0.$$

A solução $\xi_2(t)$ obtida pode ser substituída na segunda equação

$$(p+1)\xi_1 + p^3\xi_2 = 0$$

e assim a solução do exemplo 6 depende apenas das condições iniciais $\xi_1(0^-)$ e $\xi_2(0^-)$.

Exemplo 7 : Escreveremos o sistema do exemplo 6 em variáveis de estado. Para isso note que :

$$(p+2)\xi_2 = u$$

logo

$$p(p+2)\xi_2 = pu \Rightarrow p^2\xi_2 + 2p\xi_2 = pu$$

$$p^2(p+2)\xi_2 = p^2u \Rightarrow p^3\xi_2 + 2p^2\xi_2 = p^2u$$

Assim

$$\begin{aligned} p^3\xi_2 &= -2p^2\xi_2 + p^2u \\ &= -2(pu-2p\xi_2) + p^2u \\ &= -2[pu-2(u-2\xi_2)] + p^2u \\ &= p^2u-2pu+4u-8\xi_2 \end{aligned}$$

Logo

$$p\xi_1 = -\xi_1 + 8\xi_2 - 4u + 2pu - p^2u$$

$$p\xi_2 = -2\xi_2 + u$$

$$y = \xi_1$$

Definindo

$$x_1 = \xi_1 + pu - 3u$$

$$x_2 = \xi_2$$

Então

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 8x_2 - 7u$$

$$\dot{x} = -2x_2 + u$$

$$y = x_1 + 3u - pu$$

Note que as três últimas equações formam uma descrição de estado do sistema onde:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D(p) = (-p+3)$$

5. Descrições Entrada-Saída

Uma descrição polinomial e uma descrição de estado são descrições internas. No entanto, se na descrição polinomial tomarmos $u(t) = 0$ e $\xi(t) = 0$ para $t < 0$ (em particular a condição inicial é nula), então a solução $\xi(t)$ (e portanto $y(t)$) passará a depender somente da entrada $u(t)$ aplicada. Assim, aplicando-se a transformada de laplace em ambos os lados da eq. (1.1.a)-(1.1.b), vamos obter :

$$T(s)\,\hat{\xi}(s) \;=\; U(s)\,\hat{u}(s) \tag{5.1.a}$$

$$\hat{y}(s) \;=\; V(s)\,\hat{\xi}(s) + W(s)\,\hat{u}(s) \tag{5.1.b}$$

Como $\det\Big(T(s)\Big) \neq 0$, da eq. (5.1) resulta

$$\hat{y}(s) = G(s)\,\hat{u}(s) \tag{5.2}$$

onde

$$G(s) = V(s)\,T(s)^{-1}U(s) + W(s) \tag{5.3}$$

é denominada matriz de transferência do sistema. Em particular quando

$$\Big\{T(p),\ U(p),\ V(p),\ W(p)\Big\} = \Big\{(pI-A),\ B,\ C,\ D(p)\Big\}$$

segue-se que

$$G(s) = C\,(sI-A)^{-1}B + D(s) \tag{5.4}$$

Note que, de (5.2) podemos definir a matriz de resposta aos impulsos H(t) por

$$H(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big\{G(s)\Big\} \tag{5.5}$$

e assim teremos a integral de convolução

$$y(t) = \int_0^{\infty} H(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^{\infty} H(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau. \tag{5.6}$$

Exemplo 7 :

$$T(s) = \begin{bmatrix} K & -K \\ 0 & Ms^2+Bs \end{bmatrix} \qquad U(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$V(s)=[\ 1\quad 0\ ]\qquad W(s)=0$

$$G(s)=[\ 1\quad 0\ ]\begin{bmatrix} K & -K \\ 0 & Ms^2+Bs \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{Ms^2+Bs}+\frac{1}{K}$$

Portanto

$$H(t)=\begin{cases} 1/B\,(1-e^{-Bt/M})+(1/K)\,\delta(t) & ,\ t\geq 0 \\ 0\ , \quad t<0 \end{cases}$$

6. Causalidade

Seja $G(s)$ a matriz de transferencia de um sistema linear contínuo. Note que toda matriz de transferência $G(s)$ pode ser decomposta como abaixo :

$$G(s)=G_1(s)+G_0(s) \tag{6.1}$$

onde $G_1(s)$ é estritamente própria e $G_0(s)$ é polinomial. De fato, pois $G(s)$ é uma matriz de funções racionais $g_{ij}(s)=n_{ij}(s)/d_{ij}(s)$. Assim, podemos fazer a divisão dos polinômios n_{ij} por d_{ij} obtendo

$$n_{ij}(s)=g_{0_{ij}}(s)\,d_{ij}(s)+g_{1_{ij}}(s)$$

onde $g_{0_{ij}}(s)$ é o quociente e $g_{1_{ij}}(s)$ é o resto, ambos únicos e com $\mathrm{grau}\big(g_{1_{ij}}(s)\big)<\mathrm{grau}\big(d_{ij}(s)\big)$. Assim faça

$$\{G_0(s)\}_{ij}=g_{0_{ij}}(s)$$

$$\{G_1(s)\}_{ij}=g_{1_{ij}}(s)/d_{ij}(s)$$

Note que $G(s)$ é propria se G_0 é uma matriz de constantes e $G(s)$ é estritamente própria se G_0 uma a matriz nula.

Definição : Um sistema linear contínuo é dito ser (estritamente) causal se G_0 é uma matriz de constantes (matriz nula).

Proposição : $\left\{(pI-A),\ B,\ C,\ D(p)\right\}$ é (estritamente) causal se e só se $D(p)$ for uma matriz constante (nula).

Observação : Na literatura é usual encontrar a definição de "causalidade física" associada a definição acima. No entanto, a justificativa de que a causalidade (estrita) de um sistema está diretamente relacionada com o fato da sua função de transferência ser causal (estritamente) não é formalizada de maneira adequada nestes textos. Assim preferimos considerar o adjetivo "causal" como uma definição formal, sem fazer um paralelo com a causalidade física de um sistema.

7) Estabilidade

7.1) Estabilidade Externa (BIBO)

Dizemos que um sistema dinâmico causal possui estabilidade externa se qualquer entrada limitada provoca sempre uma saída limitada. Esta propriedade também é conhecida como estabilidade BIBO (bounded input, bounded output). A estabilidade externa é caracterizada pelo resultado abaixo :

Teorema 3 : Para um sistema linear invariante no tempo e causal, as afiramativas abaixo são equivalentes :

(i) O sistema é externamente estável.

(ii) $\displaystyle\int_{0^+}^{\infty} \| H(t) \| dt < \infty$

(iii) As raízes de qualquer elemento do denominador de G(s) tem parte real negativa.

Obs: $\| H(t) \| = \left\{ \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} h_{ij}(t)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$

Se o sistema não for causal, definiremos estabilidade externa pela condição (iii) do teorema 3.

7.2) Estabilidade da Saída

Dizemos que um siatema dinâmico é de saída estável se para todo conjunto de condições iniciais, a saída $y(t) = y_0(t)$ com entrada nula tende assintoticamente para zero, isto é, $\lim_{t\to\infty} y_0(t) = 0$.

Mostraremos mais tarde que a estabilidade da saída equivale aos fato dos modos instáveis serem não observáveis.

7.3) Estabilidade Interna

Um sistema dinâmico é dito ser estável internamente se para todo conjunto de condições iniciais temos que a solução homogênea é limitada, isto é

$$\lim_{t\to\infty} \xi_0(t) = 0 \qquad \text{(descrição polinomial)}$$

ou

$$\lim_{t\to\infty} x_0(t) = 0 \qquad \text{(descrição de estado).}$$

Def : Diz-se que um polinômio é Hurwitz se suas raízes pertencem ao semiplano esquerdo aberto complexo $\mathbb{C}^-$.

Teorema 4 : As seguintes afirmativas são equivalentes para um sistema linear invariante no tempo :

(i) O sistema possui estabilidade interna.

(ii) Sua descrição polinomial é tal que $\det(T(p))$ é um polinômio Hurwitz.

(iii) Sua descrição de estado é tal que $\det(sI-A)$ é Hurwitz.

Exemplo 9 :

$$\left\{T(p),\ U(p),\ V(p),\ W(p)\right\} = \left\{\begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ p(p+1) & p\text{-}2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Temos $\det(T(p)) = (p+1)(p\text{-}2)$ cujas raízes são -1 e 2. Assim tal sistema não é internamente estável.

Temos também

$$G(s) = V(s)\,T^{-1}(s)\,U(s) + W(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} \\ -2 \end{bmatrix}$$

e assim este sistema possui estabilidade externa.

Mostra-se que :

(Estabilidade Interna)⇒(Estabilidade da saída)⇒(Estabilidade Externa).

Cap. 2 - Operadores Diferenciais Lineares

1. Introdução

Neste capítulo trataremos dos operadores diferenciais definidos por polinômios e matrizes de polinômios em $\boldsymbol{p}$, onde $\boldsymbol{p}$ é o operador que associa a uma função diferenciável f(t), a sua derivada f'(t). O conceito de não singularidade de uma matriz quadrada $T(\boldsymbol{p})$ será relacionado ao fato de $T(\boldsymbol{p})$ representar um operador invertível sobre os vetores de funções C^∞ definidas em $\mathbb{R}$ e que se anulam em $t \leq 0$. O conceito de matrizes unimodulares será relacionado ao fato de tais matrizes representarem operadores invertíveis sobre os vetores de funções C^∞ definidas em $\mathbb{R}$.

2. *Anel* de Polinômios e *Corpo* de Frações racionais em $\boldsymbol{p}$ (veja Hoffmann & Kunze[])

Um ***anel*** é um conjunto onde são definidas as operações de soma e produto que possuem as propriedades de soma e produto de números inteiros. Em um anel, a operação produto não possui necessariante inverso. Desta forma, o conjunto $\mathbb{A}(\boldsymbol{p})$ dos polinômios em uma variável $\boldsymbol{p}$ da forma $\pi(\boldsymbol{p})=(a_n\boldsymbol{p}^n+\ldots+a_1\boldsymbol{p}+a_0)$, onde $a_i \in \mathbb{R}$, formam um ***anel***. (veja Hoffmann & Kunze[]).

Um ***corpo*** é um conjunto onde são definidas as operações de soma e produto e tais operações possuem as mesmas propriedades de soma e produto de números reais. Assim sendo, o conjunto $\mathbb{K}(\boldsymbol{p})$ das funções racionais em uma variável $\boldsymbol{p}$ da forma $\pi(\boldsymbol{p})/\nu(\boldsymbol{p})$, onde π e ν são polinômios, formam um corpo. Note que um polinômio π pode ser considerado uma função racional com denominador igual ao polinômio constante 1. Assim $\mathbb{A}(\boldsymbol{p}) \subset \mathbb{K}(\boldsymbol{p})$.

Agora considere $B(\boldsymbol{p})$ uma matriz (m, p) (m linhas e p colunas) com elementos em $\mathbb{K}(\boldsymbol{p})$. Note que os determinantes menores de $B(\boldsymbol{p})$ também são elementos de $\mathbb{K}(\boldsymbol{p})$. Definimos o pôsto de $B(\boldsymbol{p})$ sobre o corpo $\mathbb{K}(\boldsymbol{p})$ como a maior ordem de um determinante menor que não é uma fração racional identicamente nula. Os dois próximos exemplos são esclarescedores :

exemplo 1: $$B(\boldsymbol{p})=\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}^2+1/\boldsymbol{p} & \boldsymbol{p}/\boldsymbol{p}+1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{p} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{p}+2/\boldsymbol{p}+3 \\ \boldsymbol{p}+1/\boldsymbol{p} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O posto de $B(\boldsymbol{p})$ sobre $\mathbb{K}(\boldsymbol{p})$ é 3 porque o determinante formado pelas primeiras três linhas e as primeiras três colunas é dado por $(\boldsymbol{p}^2+1)(\boldsymbol{p}+2)/(\boldsymbol{p}+3)$, que é uma função racional não nula. Agora considere a matriz polinomial

exemplo 2 :
$$M(p)=\begin{bmatrix} p^2+1 & p-1 & 0 \\ 0 & p^2-1 & 0 \\ p+2 & p & p+3 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é $(p^2+1)(p^2-1)(p+3)$. Segue-se que o pôsto de $M(p)$ sobre $\mathbb{K}(p)$ é 3. No entanto para $p=1$ e $p=-3$, verifica-se o pôsto de $M(p)$ sobre o corpo real é igual a 2. Para $p=\pm j$, o pôsto de $M(p)$ sobre o corpo complexo é igual a 2. Assim não devemos confundir o conceito de pôsto de uma matriz de polinômios sobre o corpo $\mathbb{K}(p)$ com o seu pôsto para determinados valores complexos de p.

3. Operadores Diferenciais Lineares Polinomiais em p

Consideraremos dois tipos de conjuntos de funções :

(1) O conjunto das funções $u:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis, que será denotado por $\mathbb{U}$;

(2) O conjunto das funções $\bar{u}:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis tais que $\bar{u}(t)=0$ para $t\leq 0$, que será denotado por $\bar{\mathbb{U}}$.

Neste contexto, podemos considerar p como um operador linear definido em $\mathbb{U}$ (que denotaremos por $p:\mathbb{U}\mapsto\mathbb{U}$) ou um operador linear definido em $\bar{\mathbb{U}}$ (que denotaremos por $p : \bar{\mathbb{U}}\mapsto\bar{\mathbb{U}}$). Um polinômio $a(p)=(a_np^n+...+a_1p+a_0)$ com $a_i\in\mathbb{R}$ ($i=1,\dots,n$) é também um operador linear sobre $\mathbb{U}$ (ou sobre $\bar{\mathbb{U}}$) definido por

$$a(p)(u)=a_n\frac{d^nu}{dt^n}+\dots+a_1\frac{du}{dt}+a_0u.$$

Sobre estes operadores podemos enunciar o seguinte resultado :

Proposição 1 : $a(p) : \mathbb{U}\mapsto\mathbb{U}$ é um operador invertível (bijetivo) se e só se $a(p)$ for um polinômio constante não nulo. isto é $a(p)=a_0$, $a_0\neq 0$.

Prova : Se $a(p)$ é um polinômio constante não nulo é imediato que $a(p)(u)=a_0u$, $a_0\neq 0$, e portanto $a(p)$ é um operador invertível. Se $a(p)$ é um operador linear invertível, então em particular $a(p)$ é injetivo. Logo não pode haver $u(\cdot)$ que não seja identicamente nulo tal que $a(p)(u)=(a_n d^nu/dt^n+...+a_1du/dt+a_0u)=0$. Mas note que, se temos algum $a_i\neq 0$ para $i>0$, então a equação diferencial linear acima possui pelo menos i soluções não triviais em $\mathbb{U}$. Concluímos que $a_n=...=a_1=0$. Como $a(p)$ é sobrejetivo, teremos obrigatoriamente $a_0\neq 0$. □

Proposição 2 : As seguintes afirmativas são verdadeiras $a(\boldsymbol{p}):\bar{U}\mapsto\bar{U}$ é um operador invertível (bijetivo) se e só se $a(\boldsymbol{p})$ for um polinômio não nulo.

Prova : Se $a(\boldsymbol{p})$ é um polinômio não nulo, então, fixado $\bar{u}(\cdot)\in\bar{U}$ a equação

$$a(\boldsymbol{p})(\bar{v})=(a_n d^n\bar{v}/dt^n+...+a_1 d\bar{v}/dt+a_0\bar{v})=\bar{u}$$

possui uma única solução $\bar{v}\in\bar{U}$ (condição inicial nula). Portanto $a(\boldsymbol{p})$ é um operador invertível sobre $\bar{U}$. Por outro lado, se $a(\boldsymbol{p})$ é um operador invertível, teremos que ele é sobrejetivo. Logo $a(\boldsymbol{p})$ é um polinômio não nulo. □

Proposição 3 : Sejam $a(\boldsymbol{p})$ e $b(\boldsymbol{p})$ dois operadores polinomiais (em $\mathbb{U}$ ou $\bar{U}$). Então

(i) $\big(a(\boldsymbol{p})+b(\boldsymbol{p})\big)(u)=a(\boldsymbol{p})(u)+b(\boldsymbol{p})(u)$.

(ii) $a(\boldsymbol{p})\big(b(\boldsymbol{p})(u)\big)=(a(\boldsymbol{p})b(\boldsymbol{p}))(u)$.

Prova : Exercício. □

No ítem (i) da proposição a seguir, consideraremos funções $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$, isto é, funções do tempo assumindo valores complexos.

Proposição 4 : As seguintes afirmativas são verdadeiras :

(i) Seja $u(t)=e^{\alpha t}$, onde $\alpha\in\mathbb{C}$. Então $a(\boldsymbol{p})(u)=a(\alpha)e^{\alpha t}$.

(ii) Seja $\bar{u}(\cdot)\in\bar{U}$ tal que exista as transformadas de Laplace de $\bar{u}(\cdot)$ e de suas derivadas. Então $\mathcal{L}(a(\boldsymbol{p})(\bar{u}))=a(s)\bar{U}(s)$, onde $\bar{U}(s)=\mathcal{L}(\bar{u}(\cdot))$.

(iii) Seja $a(\boldsymbol{p}):\bar{U}\mapsto\bar{U}$ um operador invertível e $\bar{u}\in\mathbb{U}$. Suponha que $\bar{u}$ e $a^{-1}(\boldsymbol{p})(\bar{u})$ e suas derivadas são transformáveis por Laplace. Seja $\mathcal{L}(u(t))=\bar{U}(s)$. Então $\mathcal{L}(a^{-1}(\boldsymbol{p})(\bar{u}))=\bar{U}(s)/a(s)$

(iv) Se $a(\boldsymbol{p}):\bar{U}\mapsto\bar{U}$ é um operador invertível e $\bar{u}\in\bar{U}$, então $a^{-1}(\boldsymbol{p})(b(\boldsymbol{p})(\bar{u}))=b(\boldsymbol{p})(a^{-1}(\boldsymbol{p})(\bar{u}))$.

Prova : (i) Imediata do fato de $a_k\boldsymbol{p}^k(e^{\alpha t})=a_k\alpha^k e^{\alpha t}$.

(ii) Imediata do fato de $\mathcal{L}(a_k\boldsymbol{p}^k(\bar{u}))=a_k s^k\bar{U}(s)$.

(iii) Seja $\bar{v}=a^{-1}(\boldsymbol{p})(\bar{u})$. Então

$$a(\boldsymbol{p})(\bar{v})=(a_n d^n\bar{v}/dt^n+...+a_1 d\bar{v}/dt+a_0\bar{v})=\bar{u}$$

Aplicando-se a tranformada de Laplace em ambos os lados da eq. acima teremos a propriedade desejada como consequencia de (ii).

(iv) Basta notar que

$$a^{-1}(\boldsymbol{p})(b(\boldsymbol{p})(\bar{u}))=a^{-1}b(\bar{u})=a^{-1}b(aa^{-1})(\bar{u})=a^{-1}(ba)a^{-1}(\bar{u})=a^{-1}(ab)a^{-1}(\bar{u})$$
$$=(a^{-1}a)ba^{-1}(\bar{u})$$

□

Observação : A proposição 4 nos diz que as frações racionais de $\mathbb{K}(\boldsymbol{p})$ podem ser considerados como operadores em $\bar{\mathbb{U}}$. De fato, se $r(\boldsymbol{p})=a(\boldsymbol{p})/b(\boldsymbol{p})$ é um elemento de $\mathbb{K}(\boldsymbol{p})$, e $\bar{u} \in \bar{\mathbb{U}}$ então $r(\boldsymbol{p})(\bar{u})$ pode ser definido por $a^{-1}b(\bar{u})=ba^{-1}(\bar{u})$. No domínio de Laplace vemos de (ii) e (iii) acima que podemos escrever

$$\mathcal{L}(r(\boldsymbol{p})(\bar{u}))=r(s).\bar{U}(s)=\frac{a(s)}{b(s)}\bar{U}(s)$$

4. Operadores Diferenciais Matriciais de Polinômios em $\boldsymbol{p}$.

Consideraremos dois tipos de conjuntos de aplicações :

(1) O conjunto das aplicações $u:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^m$ infinitamente diferenciáveis, que será denotado por $\mathbb{U}^m$. Note que $u=(u_1,\dots,u_m)'$ e cada $u_i \in \mathbb{U}$;

(2) O conjunto das aplicações $\bar{u}:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^m$ infinitamente diferenciáveis tais que $\bar{u}(t)=0$ para $t \leq 0$, que será denotado por $\bar{\mathbb{U}}^m$. Note que $\bar{u}=(\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_m)'$ e cada $\bar{u}_i \in \bar{\mathbb{U}}$.

Neste contexto, podemos considerar uma matriz polinomial $B(\boldsymbol{p})$ de p linhas e m colunas (onde cada elemento $b_{ij}(\boldsymbol{p})$ é um polinômio de coeficientes reais na variável $\boldsymbol{p}$) como um operador $B(\boldsymbol{p}) : \mathbb{U}^m\mapsto\mathbb{U}^p$, onde $B(\boldsymbol{p})(u)=(\sum_{j=1}^{m} b_{1j}(\boldsymbol{p})(u_j),\dots,\sum_{j=1}^{m} b_{pj}(\boldsymbol{p})(u_j))'$. Da mesma forma podemos considerar $B(\boldsymbol{p}):\bar{\mathbb{U}}^m\mapsto\bar{\mathbb{U}}^p$.

Proposição 5 : Sejam $A(\boldsymbol{p}):\mathbb{U}^m\mapsto\mathbb{U}^k$ e $B(\boldsymbol{p}):\mathbb{U}^k\mapsto\mathbb{U}^p$. Então $B(\boldsymbol{p})\Big(A(\boldsymbol{p})u\Big)=\Big(B(\boldsymbol{p})A(\boldsymbol{p})\Big)(u)$.

Proposição $\bar{5}$: Sejam $A(\boldsymbol{p}):\bar{\mathbb{U}}^m\mapsto\bar{\mathbb{U}}^k$ e $B(\boldsymbol{p}):\bar{\mathbb{U}}^k\mapsto\bar{\mathbb{U}}^p$. Então $B(\boldsymbol{p})\Big(A(\boldsymbol{p})u\Big)=\Big(B(\boldsymbol{p})A(\boldsymbol{p})\Big)(u)$.

□

Prova : Consequência das definições e da proposição 3 parte (ii).

Proposição 6 : $T(\boldsymbol{p}) : \mathbb{U}^m\mapsto\mathbb{U}^m$ é um operador invertível (bijetivo) se e só se $\det(T(\boldsymbol{p}))$ for um polinômio constante não nulo, isto é $\det(T(\boldsymbol{p}))=a_0$, $a_0 \neq 0$.

Prova : Se $\det(T(\boldsymbol{p}))$ é um polinômio constante não nulo é imediato que $R(\boldsymbol{p})=T^{-1}(\boldsymbol{p})=\operatorname{adj} T(\boldsymbol{p})/\det(T(\boldsymbol{p}))$ é uma matriz polinomial em assim é fácil verificar pela proposição 5 que R($\boldsymbol{p}$) é o operador inverso de T($\boldsymbol{p}$), já que por construção teremos R($\boldsymbol{p}$)T($\boldsymbol{p}$)=T($\boldsymbol{p}$)R($\boldsymbol{p}$)=I. Suponha agora que det(T($\boldsymbol{p}$)) não é um polinômio ***constante não nulo***. Há duas hipóteses a examinar

(i) det(T($\boldsymbol{p}$))=0 :

Neste caso a matriz é singular sobre o corpo $\mathbb{K}(\boldsymbol{p})$. Logo existe um vetor não identicamente nulo b($\boldsymbol{p}$)=$(\theta_1(\boldsymbol{p}),\dots,\theta_m(\boldsymbol{p}))$' com elementos $\theta_i(\boldsymbol{p})$ em $\mathbb{K}(\boldsymbol{p})$ tal que T($\boldsymbol{p}$)b($\boldsymbol{p}$)=0. Assim, multiplicando os elementos de b($\boldsymbol{p}$) pelo polinômio *mínimo múltiplo comum c($\boldsymbol{p}$)* dos denominadores de θ_i, encontramos um vetor v($\boldsymbol{p}$)=$(c(\boldsymbol{p})\theta_1(\boldsymbol{p}),\dots,c(\boldsymbol{p})\theta_m(\boldsymbol{p}))$' com elementos em $\mathbb{A}(\boldsymbol{p})$ (polinomiais) e tais que T($\boldsymbol{p}$)v($\boldsymbol{p}$)=0. Seja u($\cdot$) uma função não identicamente nula de $\mathbb{U}$ tal que v($\boldsymbol{p}$)(u) não é identicamente nula (porque existe tal função? : exercício). Segue-se que T($\boldsymbol{p}$)(v($\boldsymbol{p}$)(u))=(T($\boldsymbol{p}$)v($\boldsymbol{p}$))(u)=0. Logo w=v($\boldsymbol{p}$)(u) $\in \mathbb{U}^m$ é não nula e T($\boldsymbol{p}$)(w)=0. Então T($\boldsymbol{p}$) não pode ser injetiva.

(ii) O polinômio det T($\boldsymbol{p}$) possui pelo menos uma raiz α (complexa)

Suponha inicialmente que α é real. Assim T(α) é uma matriz singular e portanto existe um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^m$ tal que T(α)v=0. Seja u(t)=$v.e^{\alpha t}$. Então pela prop. 4 é fácil ver que T($\boldsymbol{p}$)(u)=T(α)$v.e^{\alpha t}$= $e^{\alpha t}$T(α)v=0. No caso complexo ($\alpha=\sigma+j\omega$), existe um vetor $(\theta+j\mu)\in\mathbb{C}^m$ não nulo tal que $\theta,\mu\in\mathbb{R}^m$ e T(σ+jω)(θ+jμ)=0. É fácil verificar que T(σ−jω)(θ−jμ)=0. Assim podemos tomar a função real

$$u(t)=(\sigma+j\mu)e^{(\sigma+j\omega)t}+(\theta-j\mu)e^{(\sigma-j\omega)t}$$

de maneira que T($\boldsymbol{p}$)(u)=0. Logo T($\boldsymbol{p}$) não pode ser injetiva. □

Proposição 7 : T($\boldsymbol{p}$) : $\bar{\mathbb{U}}^m \mapsto \bar{\mathbb{U}}^m$ é um operador invertível (bijetivo) se e só se det(T($\boldsymbol{p}$)) for um polinômio não nulo.

Prova : Se det(T($\boldsymbol{p}$)) é um polinômio nulo então T($\boldsymbol{p}$) não pode ser injetiva pelos mesmos argumentos da parte (i) da prova da proposição 6. Se det T($\boldsymbol{p}$) é um polinômio não nulo, então $T^{-1}(\boldsymbol{p})$ é uma matriz de funções racionais em $\boldsymbol{p}$. Logo $T^{-1}(\boldsymbol{p})$: $\bar{\mathbb{U}}^m \mapsto \bar{\mathbb{U}}^m$ é um operador bem definido pela observação após a proposição 4. Pela proposição 4 parte (iv) é facil verificar que, se A($\boldsymbol{p}$) e B($\boldsymbol{p}$) são duas matrizes de funções racionais em $\boldsymbol{p}$, teremos que A($\boldsymbol{p}$)(B($\boldsymbol{p}$)($\bar{u}$))=(A($\boldsymbol{p}$)B($\boldsymbol{p}$))($\bar{u}$). Segue-se imediatamente que $T^{-1}(\boldsymbol{p})$ é o operador inverso de T($\boldsymbol{p}$). □

Observação : Se A($\boldsymbol{p}$) é uma matriz racional, no domínio de Laplace podemos escrever formalmente $\mathcal{L}$(A($\boldsymbol{p}$)($\bar{u}$))=A(s)$\bar{U}$(s).

Proposição 8 : Seja U($\boldsymbol{p}$) uma matriz pxm racional em $\boldsymbol{p}$. Suponha que U($\boldsymbol{p}$)$\bar{u}$=0 para todo $\bar{u}$ em $\bar{\mathbb{U}}^m$. Então U($\boldsymbol{p}$)=0.

Prova : Suponha que $U(\boldsymbol{p})$ possui um elemento não nulo, digamos, sem perda de generalidade que $u_{11}=ab^{-1}$ com $a, b \in \mathbb{A}(\boldsymbol{p})$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Tome $\bar{v} \in \bar{U}$ tal que $a(\bar{v}) \neq 0$. Seja $\bar{w}=b(\bar{v})$. Segue-se que $u_{11}(\bar{w})=ab^{-1}(\bar{w})=ab^{-1}b\bar{v}=a\bar{v}$. Portanto $u_{11}(\bar{w})$ é não nulo. Logo podemos construir $\bar{u}=(\bar{w}, 0, \ldots, 0)' \in \mathbb{R}^m$ tal que $U(\boldsymbol{p})(\bar{u}) \neq 0$. □