Capítulo - 1 - Revisão de Álgebra Linear

1. Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial é uma estrutura algébrica constituida de um par de objetos (K, V) onde K é denominado de **corpo** de escalares, e V é um *conjunto de vetores.*

Um corpo é um conjunto onde estão definidas as operações de soma e multiplicação, possuindo as mesmas propriedades de soma e multiplicação dos números reais. São exemplos de corpos, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

O conjunto de vetores V é um conjunto onde existe uma operação de soma (comutativa), possuindo um elemento neutro denominado vetor nulo. Mais ainda, existe uma operação de multiplicação de um escalar de K por um vetor de V, fornecendo como resultado um outro vetor de V. Muitas vezes, dizemos que o espaço vetorial V é um espaço vetorial ***sobre*** **K**, para chamarmos atenção de qual conjunto de escalares estamos considerando. Aconselhamos ao leitor que consulte um texto de Álgebra linear para que reveja as definições axiomáticas completas de espaço vetorial.

2. Exemplos de Espaços Vetoriais

a. O conjunto V das funcões contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ se definirmos :

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(c\, f_1)(x) = c f_1(x)$$

para todo $c \in \mathbb{R}$ e $f_1, f_2 \in V$.

b. O conjunto V das ênuplas ordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ com $x_i \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as definições

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$c(x_1, \dots, x_n) = (c\, x_1, \dots, c\, x_n)$$

para todo $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n) \in V$ e todo $c \in \mathbb{R}$. Tal espaço vetorial é denominado espaço Euclideano de dimensão n e denotado por $\mathbb{R}^n$.

c. Uma definição análoga, mas com $\mathbb{C}$ substituindo $\mathbb{R}$, dá origem ao espaço vetorial $\mathbb{C}^n$.

d. O conjunto V das ênuplas ordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ com $x_i \in \mathbb{Q}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, com as definições

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$c(x_1, \dots, x_n) = (c\, x_1, \dots, c\, x_n)$$

para todo $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n) \in$ V e todo $c \in \mathbb{Q}$. Tal espaço vetorial é denotado por $\mathbb{Q}^n$.

e. Um espaço vetorial "bem estranho" é obtido se considerarmos o conjunto V das ênuplas ordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ com $x_i \in \mathbb{R}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, com as definições

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$c(x_1, \dots, x_n) = (c\, x_1, \dots, c\, x_n)$$

para todo $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n) \in$ V e todo $c \in \mathbb{Q}$. Tal espaço vetorial não possui a mesma natureza dos espaços euclidianos. De fato, pode-se mostrar que tal espaço vetorial possui dimensão infinita! Logo tenha cuidado com o corpo de escalares!

3. Subespaços

Se $\mathfrak{V}$ é um espaço vetorial sobre um corpo K, um dado subconjunto $V \subseteq \mathfrak{V}$ é dito ser um subespaço de $\mathfrak{V}$, se V é um espaço vetorial (sobre K) com as mesmas operações definidas no espaço vetorial $\mathfrak{V}$.

Proposição 1. V é subespaço de $\mathfrak{V}$ se e só se para todo $v_1, v_2 \in V$, e todo par de escalares $\alpha, \beta \in K$ tenhamos $(\alpha v_1 + \beta v_1) \in V$.

OBS : Note que todo subespaço vetorial $V \subseteq \mathfrak{V}$ contém o vetor nulo de $\mathfrak{V}$ (Mostre porque).

4. Dependência Linear

Seja $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathfrak{V}$, onde $\mathfrak{V}$ é um espaço vetorial sobre K. Dizemos que o conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ é *linearmente dependente (L. D.)* se e somente se existirem escalares $c_i \in K$ tais que $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$. Caso contrário dizemos que tal conjunto é *linearmente independente.*

Note que um conjunto que possui o vetor nulo é sempre linearmente dependente.

Proposição 2. O conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é L.I. se e só se a equação $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$ para $c_i \in K$ implicar em $c_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

5. Subespaços Gerados, Bases e Dimensão

Definição 3. Seja $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathfrak{V}$, onde $\mathfrak{V}$ é um espaço vetorial sobre K. O conjunto gerado por X, denotado por **span{X}** ou **span{$x_1, \ldots, x_n$}** é definido por :

$$\text{span}\{x_1, \ldots, x_n\} = \{x \in \mathfrak{V} \mid x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \, , \, \lambda_i \in K\}$$

note que o conjunto gerado por X é o conjunto de todas as combinações lineares possíveis formadas pelos elementos de X com coeficientes em K. Dizemos que o conjunto X gera $\mathfrak{V}$ quando $\text{span}\{X\} = \mathfrak{V}$. Uma ***base*** B de $\mathfrak{V}$ é um conjunto linearmente independente que gera $\mathfrak{V}$.

Teorema 4. As seguintes afirmativas são verdadeiras :

(i) $\text{span}\{y_1, \ldots, y_p\}$ é um subespaço de $\mathfrak{V}$.

(ii) Se $\text{span}\{y_1, \ldots, y_p\} = \text{span}\{x_1, \ldots, x_q\} = \mathfrak{V}$ e ambos os conjuntos $\{y_1, \ldots, y_p\}$ e $\{x_1, \ldots, x_q\}$ são L.I., temos $p = q = d$, onde d é dita dimensão de $\mathfrak{V}$.

(iii) Qualquer conjunto com menos de d elementos não pode gerar $\mathfrak{V}$.

(iv) Qualquer conjunto com mais de d elementos é L.D.

(v) Todo conjunto L.I. de d elementos é uma base de $\mathfrak{V}$.

Exemplos :

(a) Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base do $\mathbb{R}^3$, denominada base canônica.

(b) (De agora em diante vamos representar os vetores como *vetores coluna*)

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$ é um conjunto L.I. e é portanto uma base do $\mathbb{R}^3$.

(c) $\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ é um subespaço de dimensão 2 do $\mathbb{R}^3$ (forneça uma base deste subespaço).

(d) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ é um conjunto L.D. porque possui 4 vetores do $\mathbb{R}^3$.

Obs: O número de elementos de uma base de um espaço vetorial $\mathfrak{V}$ é denominado dimensão de $\mathfrak{V}$ e denotado por $\dim(\mathfrak{V})$.

Teorema 5. Fixada uma base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de $\mathfrak{V}$, então todo vetor de $x \in \mathfrak{V}$ se escreve ***unicamente*** como :

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

onde os c_i são escalares adequados.

OBS : Fixada uma base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de $\mathfrak{V}$ como no teorema 5, é usual representar o vetor $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ pelo vetor coluna

$$x = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$$

Observação : Dado um conjunto de r vetores coluna (escritos em alguma base), eles são linearmente dependentes se (e somente se), da matriz formada por estes vetores coluna, só podemos extrair determinantes menores $r \times r$ nulos. Se existir algum determinante menor $r \times r$ não nulo, então os vetores são linearmente independentes.

Proposição 6 : (Completamento de base) Fixada uma base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de $\mathfrak{X}$ e dado um conjunto $\{\xi_1, \dots, \xi_r\} \subset \mathfrak{X}$, existe um subconjunto $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-r}}\} \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ tal que $\{\xi_1, \dots, \xi_r, x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-r}}\}$ forma uma nova base de $\mathfrak{X}$.

6. Matrizes de Mudança de base

Sejam $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{f_1, \dots, f_n\}$ duas bases distintas de $\mathfrak{X}$. Então, pelo teorema 5, existem escalares h_{ij} com $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tais que

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} h_{ij}\, f_i \tag{1}$$

Note que podemos escrever

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix}$$

onde as coluna j de H representa os vetores coluna e_j quando escritos na base $\{f_1, \dots, f_n\}$. Tal matriz é denominada matriz de mudança de base. De fato, seja $x \in \mathfrak{X}$ um vetor arbitrário. Ainda pelo teorema 5, podemos escrever

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j\, e_j \tag{2}$$

ou

$$x = \sum_{i=1}^{n} d_i\, f_i$$

mostraremos que

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

ou seja, a matriz H é a matriz de passagem de um vetor coluna escrito na base $\{e_1, \dots, e_n\}$ para o mesmo vetor escrito na base $\{f_1, \dots, f_n\}$. Para mostrar isto basta substituir (1) em (2), obtendo :

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{j=1}^{n} c_j \, \mathrm{e}_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{n} h_{ij} \, \mathrm{f}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} h_{ij} \, c_j \right) \mathrm{f}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_i \, \mathrm{f}_i
\end{aligned}
$$

e isto mostra o resultado desejado. □

Observação : Mostra-se facilmente que a matriz H é não singular e a matriz H^{-1} é a matriz de mudança de base no sentido inverso. Lembre-se que a inversa de uma matriz é dada por :

$$\mathrm{H}^{-1} = \frac{\mathrm{adj\ H}}{\det \mathrm{H}}$$

onde (adj H) é a transposta da matriz dos cofatores. A matriz dos cofatores é a matriz cujo elemento ij é dado por $(-1)^{(i+j)} \det \mathrm{H}_{ij}$, onde H_{ij} é a matriz que se obtém de H eliminando-se a linha i e a coluna j.

7. Transformações lineares e matrizes.

Uma ***aplicação linear*** $\mathrm{T} : \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{Y}$ entre espaços vetoriais $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ sobre um mesmo corpo K, é uma aplicação tal que :

$$\mathrm{T}(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 \mathrm{T}(x_1) + c_2 \mathrm{T}(x_2)$$

Seja $\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ uma base de $\mathfrak{X}$ e $\{\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_m\}$ uma base de $\mathfrak{Y}$. Então os escalares $\mathrm{t}_{ij} \in \mathrm{K}$ tais que (tais escalares existem e são únicos pelo teorema 5)

$$\mathrm{T}(\mathrm{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{t}_{ij} \, \mathrm{f}_i$$

definem totalmente a transformação linear T. De fato, pelo teorema 5 podemos escrever $x = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \mathrm{e}_j$ e $\mathrm{T}(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i \mathrm{f}_i$ para escalares c_j e d_j adequados. Então,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}(x) &= \mathrm{T}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{T}(\mathrm{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{n} \mathrm{t}_{ij} \, \mathrm{f}_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{t}_{ij} \, c_j \right) \mathrm{f}_i = \sum_{i=1}^{n} d_i \mathrm{f}_i
\end{aligned}
$$

Logo, $d_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\, c_j$, ou em notação matricial :

$$T(x) = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

A matriz acima é denominada *matriz de T* e depende das bases escolhidas em $\mathfrak{X}$ e em $\mathfrak{Y}$. Observe que a coluna j da matriz de T corresponde ao vetor coluna $T(e_j)$ quando escrito na base $\{f_1, \dots, f_m\}$. É corriqueiro denotar a matriz da trensformação linear T pela mesma letra T, tomando-se o cuidado de percebermos que a matriz é um objeto que depende da base escolhida enquanto a transformação linear T é um objeto intrínseco.

8) Imagem e núcleo de uma transformação linear $T : \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{Y}$

A Imagem de T, denotada por Im T, é o subconjunto de $\mathfrak{Y}$ definido por

$$\text{Im } T = \{y \in \mathfrak{Y} \mid y = Tx,\ x \in \mathfrak{X}\}$$

Mostra-se facilmente que a imagem de T é um subespaço. Em termos computacionais, mostra-se que a Im T é o subespaço gerado pelos vetores coluna da matriz de T.

O pôsto ρ de uma transformação linear é, por definição, a dimensão de Im T. Note que a dimensão da imagem de T é a dimensão do subespaço gerado pelos vetores coluna de sua matriz, ou equivalentemente, é a ordem máxima de um *determinante menor* não nulo extraído da sua matriz. Assim, o posto da matriz transposta T′ é igual ao pôsto de T. Em outras palavras, para computação do posto podemos determinar a dimensão do subespaço gerado pelas linhas ou pelas colunas de T, produzindo o mesmo resultado.

O núcleo de T, denotado por Ker T, é definido por

$$\text{Ker } T = \{x \in \mathfrak{X} \mid Tx = 0\}$$

Mostra-se que Ker T é um subespaço. O resultado seguinte é útil para computação do núcleo de uma transformação linear.

Teorema 7 : $\dim(\mathrm{Im}\ T) + \dim(\mathrm{Ker}\ T) = \dim(\mathcal{X})$

Proposição 8 : As seguintes afirmativas são equivalentes para uma transformação linear $T : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$, onde $\dim(\mathcal{X}) = n$ e $\dim(\mathcal{Y}) = m$:

(i) T é injetiva, i. e. , se $x_1 \neq x_2$ então $T(x_1) \neq T(x_2)$;

(ii) Ker T $= \{0\}$;

(iii) Os vetores coluna da matriz de T são linearmente independentes ;

(iv) O pôsto de T é igual a n, sendo n obrigatoriamente menor que m ;

Proposição 9 : As seguintes afirmativas são equivalentes para uma transformação linear $T : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$, onde $\dim(\mathcal{X}) = n$ e $\dim(\mathcal{Y}) = m$:

(i) T é sobrejetiva, i. e. , Im $T = \mathcal{Y}$;

(ii) ~~Ker T = {0}~~ ;

(iii) Os vetores linha da matriz de T são linearmente independentes ;

(iv) O pôsto de T é igual a m, sendo m obrigatoriamente menor que n ;

9) Soma e Intersecção de subespaços

Dados dois subespaços $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$ de $\mathcal{X}$ podemos definir o subespaço soma como o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores desses subespaços, i.e. :

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = \{x \in \mathcal{X} \mid x = r + s \ , \ r \in \mathcal{R}, \ s \in \mathcal{T}\}$$

A interseção de subespacos é definida pela intersecção "natural" de conjuntos, e neste caso fornece o subespaço interseção $\mathcal{R} \cap \mathcal{T}$ dado por

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \{x \in \mathcal{X} \mid x \in \mathcal{R} \text{ e } x \in \mathcal{T}\}$$

Note que a união de dois subespaços não é, em geral, um subespaço. Por exemplo, a união dos eixos coordenados x e y do plano cartesiano não é um subespaço.

Observação : Sejam R, T matrizes com mesmo número de linhas. Se $\mathcal{R} =$ Im R e $\mathcal{T} =$ Im T, então $\mathcal{R} + \mathcal{T} = \mathrm{Im}[R\ T]$, onde $[R\ T]$ é a matriz obtida pela justaposição das colunas de R e T.

Definição 10 : Se $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = 0$, então os subespaços $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$ são ditos *independentes*. Neste caso. a soma de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$ é denominada *soma direta* e é denotada por $\mathcal{R} \oplus \mathcal{T}$.

Proposição 11 : As seguintes afirmativas são equivalentes para dois subespaços $\mathcal{R}$. $\mathcal{T}$ de um mesmo espaço vetorial :

(i) Os subespaços $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$ são independentes.

(ii) Todo vetor v de $\mathcal{R} + \mathcal{T}$ se escreve **unicamente** como uma soma $\mathrm{r} + \mathrm{t}$, onde $\mathrm{r} \in \mathcal{R}$ e $\mathrm{t} \in \mathcal{T}$.

Proposição 12 : Dados dois subespaços $\mathcal{R}$ e $\mathcal{T}$ de um mesmo espaço vetorial existem subespaços $\hat{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}$ e $\hat{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$ tais que $\mathcal{R} + \mathcal{T} = (\mathcal{R} \cap \mathcal{T}) \oplus \hat{\mathcal{R}} \oplus \hat{\mathcal{T}}$.

Obs: Para construir os subespaços $\hat{\mathcal{R}}$ e $\hat{\mathcal{T}}$ da proposição anterior, basta completar a base de $(\mathcal{R} \cap \mathcal{T})$ com elementos $\{\hat{\mathrm{r}}_1, \dots, \hat{\mathrm{r}}_k\}$ de uma escolhidos entre os elementos de base de $\hat{\mathcal{R}}$ até obter uma base de $\mathcal{R}$. Assim $\mathcal{R} = \operatorname{span}\{\hat{\mathrm{r}}_1, \dots, \hat{\mathrm{r}}_k\}$. Depois completa-se uma base de $\mathcal{R}$ com elementos $\{\hat{\mathrm{t}}_1, \dots, \hat{\mathrm{t}}_p\}$ escolhidos entre os elementos de uma base de $\mathcal{T}$, obtendo-se uma base de $\mathcal{R} + \mathcal{T}$. Assim, $\hat{\mathcal{T}} = \operatorname{span}\{\hat{\mathrm{t}}_1, \dots, \hat{\mathrm{t}}_p\}$. Note que a construção da soma direta da proposição 12 não é única, bastando para isso que se escolham bases diferentes no procedimento acima.

As definições de soma e intersecção de subespaços podem ser generalizadas indutivamente para uma família de subespaços $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k\}$ de um mesmo espaço vetorial. Denota-se por $\mathcal{R}_1 + \dots + \mathcal{R}_k$ (ou $\sum_{i=1}^{k} \mathcal{R}_i$) a soma dessa familia e por $\mathcal{R}_1 \cap \dots \cap \mathcal{R}_k$ (ou $\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{R}_i$) a intersecção dos elementos desta família. A definição 10 também pode ser generalizada como se segue.

Definição 13 : Os subespaços de uma família $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k\}$ são ditos *independentes* se tivermos $\mathcal{R}_i \cap \sum_{j \neq i} \mathcal{R}_j = \{0\}$ para todo $i = 1, \dots, k$, i. e., cada subespaço é independente da soma de todos os outros. Neste caso, a soma destes subespaços é denominada de soma direta e denotada por $\mathcal{R}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_k$ (ou $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{R}_i$).

Proposição 14 : As seguintes afirmativas são equivalentes uma família de subespaços $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k\}$ de um mesmo espaço vetorial :

(i) Os subespaços de $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k\}$ são independentes.

(ii) Todo vetor v de $\mathcal{R}_1 + \ldots + \mathcal{R}_k$ se escreve **unicamente** como uma soma $r_1 + \ldots + r_k$, onde cada $r_i \in \mathcal{R}_i$, $i = 1, \ldots, k$.

(iii) $\mathcal{R}_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{R}_j = \{0\}$ para todo $i = 2, \ldots, k$.

10) Imagem inversa e direta de um subespaço por uma transformação linear.

Seja $\mathcal{R}$ um subespaço de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{T}$ um subespaço de $\mathcal{Y}$. Seja $T : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ uma transformação linear. Podemos definir o subespaço imagem de $\mathcal{R}$ por T como

$$T\mathcal{R} = \{y \in \mathcal{Y} \mid y = T\,r,\ r \in \mathcal{R}\}$$

e o o subespaço imagem inversa de $\mathcal{T}$ por T, como

$$T^{-1}\mathcal{T} = \{x \in \mathcal{X} \mid Tx = y,\ y \in \mathcal{Y}\}$$

OBS : Na definição acima, T^{-1} não denota a inversa de T. Note que $T^{-1}\mathcal{T}$ pode ser definido mesmo que T não seja invertível !

Proposição 15 : Seja $T : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ uma transformação linear, seja $\mathcal{R}$ um subespaço de $\mathcal{X}$ e seja $\mathcal{T}$ um subspaço de $\mathcal{Y}$. As seguintes afirmativas são verdadeiras :

(i) $\dim(T\mathcal{R}) = \dim(\mathcal{R}) - \dim(\mathcal{R} \cap \mathrm{Ker}\ T)$.

(ii) $\dim(T^{-1}\mathcal{T}) = \dim(\mathrm{Ker}\ T) + \dim(\mathcal{T} \cap \mathrm{Im}\ T)$

Observação : Note que (i) generaliza o teorema 7. De fato, fazendo $\mathcal{R} = \mathcal{X}$ em (i), obtemos o teorema 7.