LISTAS DE EXERCÍCIOS
PTC - 5746

Controle Linear Multivariável
(Pós-Graduação)

Prof. Paulo Sérgio Pereira da Silva

2007

1ª Lista de Exercícios (Algebra Linear)

Controle Multivariável – PTC 5746 – Prof. Paulo Sérgio

ESTA LISTA NÃO VALE NOTA!

1ª Questão :

Determine uma base das Imagens e dos Núcleos das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para cada transformação linear $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, verificar a igualdade $d(\mathcal{X}) = d(ImA) + d(KerA)$.

2ª Questão :

Dadas bases $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de um subespaço $\mathcal{V}$ e $\{r_1, \ldots, r_p\}$ de um subespaço $\mathcal{R}$, pede-se:

(a) Descrever um método de obtenção da base de $\mathcal{V} + \mathcal{R}$, justificando.

(b) Idem para $\mathcal{V} \cap \mathcal{R}$.

(c) Calcular (a) e (b) para :

$$\mathcal{V} = Im \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathcal{R} = Im \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3ª Questão :

Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontre a nova expressão de A quando utilizamos as bases

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{do } \mathbb{R}^3 \text{ e } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{do } \mathbb{R}^4.$$

4ª Questão :

Seja

$$A = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 22 & 28 \\ -1 & -5 & 39 & 56 \\ -35 & -7 & 63 & 28 \\ 12 & 32 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

e seja

$$\mathcal{V} = Im \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pede-se :

(a) Mostrar que $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$.

(b) Mostrar que :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $\mathcal{X}$ adaptada à decomposição $\mathcal{X} = \mathcal{V} \oplus \widehat{\mathcal{X}}$. Determinar a expressão de A nesta nova base. Justificar a forma peculiar da nova matriz de A. Construir uma outra base de $I\!R^4$ com a mesma propriedade e recalcular a matriz de A nesta base.

2ª Lista de Exercícios – Controle Multivariável

PTC 5746 – Prof. Paulo Sérgio

ESTA LISTA SE REFERE À PRIMEIRA METADE DO CURSO

1ª Questão :

Seja o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ onde $x(t) \in \mathcal{X}$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathcal{U}$ é o vetor de entradas e $y(t) \in \mathcal{Y}$ é o vetor de saídas, dado por :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Pede-se :

(a) Dizer se o sistema é controlável, justificando.

(b) Dizer se o sistema é controlável apenas pela entrada u_1. Determinar uma base do subespaço $\mathcal{R}_0^1$ alcançável pela entrada u_1 somente. Escrever as matrizes (A, B) numa base de $\mathcal{X}$ em que os primeiros vetores formem uma base do subespaço $\mathcal{R}_0^1$. Fornecer o subsistema controlável e o subsistema não controlável correspondentes.

(c) Dizer se o sistema é observável, justificando.

(d) Dizer se o sistema é observável apenas pela saída y_1. Determinar uma base do subespaço $\mathcal{N}_0^1$ não observável considerando-se a saída y_1 somente. Escrever as matrizes (C, A) numa base de $\mathcal{X}$ em que os primeiros vetores formem uma base do subespaço $\mathcal{N}_0^1$. Fornecer o subsistema observável e o subsistema não observável correspondentes.

2ª Questão :

Considere o sistema cuja representação de estado é dada por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Pede-se :

(a) Determinar a função de transferência do sistema.

(b) Mostrar que o sistema é sempre controlável.

(c) Determinar as condições que os parâmetros a_1, a_2, c_1, c_2 devem cumprir para que o sistema não seja observável.

(d) Mostrar que o sistema não é observável **se e somente se** existir um cancelamento de pólo com zero da função de transferência. Analise separadamente os casos :

- (d.1) c_2 é diferente de zero.
- (d.2) $c_2 = 0, c_1 = 0$.
- (d.3) $c_2 = 0, c_1$ é diferente de zero.

Repita o exercício para o sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

mostrando que o sistema é controlável se e somente se não há cancelamento de pólo(s) com zero(s).

3ª Questão :

(a) Mostre que um sistema (A, B) é controlável se e somente se $[sI - A \quad B]$ possui posto $n = \dim \mathcal{X}$ para todo $s \in \mathbb{C}$.

(b) Mostre que (a) é equivalente a dizer que todo autovetor à esquerda de A não é ortogonal a B, isto é, se $h \in \mathbb{C}^n$ é tal que $h^T A = \lambda h^T$, para $\lambda \in \mathbb{C}$ então $h^T B \neq 0$ (critério de controlabilidade de Hautus).

(c) Mostre que um sistema (C, A) é observável se e somente se $\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$ possui posto $n = \dim \mathcal{X}$ para todo $s \in \mathbb{C}$.

(d) Mostre que (c) é equivalente a dizer que todo autovetor de A não está no núcleo de C, isto é, se $h \in \mathbb{C}^n$ é tal que $Ah = \lambda h^T$, para $\lambda \in \mathbb{C}$ então $Ch \neq 0$ (critério de observabilidade de Hautus).

4ª Questão :

(a) Seja $\mathcal{V}$ um espaço A-invariante e escreva o sistema (A, B) numa base onde os primeiros k-vetores formem uma base de $\mathcal{V}$, obtendo :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

Mostre que, se (A, B) é controlável, então (A_{22}, B_2) é controlável (dica : Critério de controlabilidade Hautus - Ex. 3).

(b) Seja $\mathcal{V}$ um espaço A-invariante e escreva o sistema (C, A) numa base onde os primeiros k-vetores formem uma base de $\mathcal{V}$, obtendo :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

Mostre que, se (C, A) é observável, então (C_1, A_{11}) é observável (dica : Critério de observabilidade de Hautus - Ex. 3).
(c) Usando os ítens (a) e (b), mostre as seguintes afirmações :

1. A parte observável de um sistema controlável é controlável.

2. A parte controlável de um sistema observável é observável.

$5^{\underline{a}}$ Questão :
Seja um sistema linear (A, B). Dizemos que um estado $z \in \mathcal{X}$ é segurável se existir uma entrada $u(\cdot)$ tal que, se a condição inicial do sistema for z, a aplicação de $u(\cdot)$ garante que $x(t) \equiv z$ para todo $t \geq t_0$. Pede-se :
(a) Determinar o subconjunto $\mathcal{S}$ dos estados seguráveis de um sistema (A, B).
(b) Determinar o subconjunto $\mathcal{T}$ dos estados alcançáveis e seguráveis.
(c) Pede-se determinar $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ para o sistema (massa unitária sujeita a uma força u) $\dot{x} = Ax + Bu$ onde :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Para o sistema acima, pede-se determinar $u(\cdot)$ que leve o sistema da origem para $z = (1\ 0)^T$ em $T = 1$ segundo e que segure o sistema em z para todo $t \geq T$.

$6^{\underline{a}}$ Questão :
(Controlabilidade e integrais primeiras) Dado um sistema dinâmico, uma integral primeira é uma função cuja derivada ao longo de uma solução se anula. Considere um sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

Assuma que C é uma matriz não nula. Seja $\dot{y} = C\dot{x} = C(Ax + Bu)$. Mostre que se $\dot{y} \equiv 0$ para todo x e todo u então o sistema não é controlável. Em outras palavras, a existência de integrais primeiras implica na perda de controlabilidade.

$7^{\underline{a}}$ Questão :
Considere um sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}.$$

Seja $\mathcal{R}_0 = Im[B\ \ AB \ldots A^{n-1}B]$ e

$$\mathcal{N}_0 = Ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Mostre que as seguintes afirmativas são equivalentes :

1. A matriz de transferência do sistema é nula.
2. $\mathcal{R}_0 \subset Ker\ C$.
3. $Im\ B \subset \mathcal{N}_0$.
4. $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{N}_0$.

(Dica : use os fatos : (a) $\mathcal{R}_0$ é o menor A invariante que contém $Im\ B$; (b) $\mathcal{N}_0$ é o maior A invariante contido em $Ker\ C$).

8ª Questão :

Dê um exemplo de um sistema cujo espaço de estados tenha dimensão 4, com 2 saídas e duas entradas ($\dim \mathcal{X} = 4$, $\dim \mathcal{Y} = 2$ e $\dim \mathcal{U} = 2$) tal que:
a) seja controlável mas não seja observável ;
b) seja observável mas não seja controlável ;
c) seja observável e controlável ;
d) não seja controlável nem observável.

9ª Questão :

Seja o sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 28 \\ 6 & 6 & -34 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

pede-se:
(a) Projetar uma realimentacão de estados F que imponha os pólos $\sigma(A + BF) = \{-1, -1 - j, -1 + j\}$.
(b) Projetar um observador de estado com os mesmos pólos do ítem acima. Projetar um compensador observador/controlador com os mesmos pólos impostos anteriormente e fazer um diagrama de blocos do sistema em malha fechada.
(c) Determinar os pólos do sistema em malha fechada e a sua matriz de transferência (nova entrada para saída y).
Obs. : Este exercício exige o conhecimento dos capítulos 11 e 12.

10ª Questão :

Dado o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

onde x é o vetor de estado, u é o vetor de entrada e y é o vetor de saídas e

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Discuta a estabilizabilidade e a detectabilidade do sistema. Diga que conjunto de pólos podem ser obtidos por realimentação de estado (A+BF) e por injeção de saída (A+GC). Em outras palavras, queremos saber quais são os pólos fixos por perda de observabilidade e controlabilidade.

(b) Pede-se projetar uma realimentacão de estado tal o sistema tenha os pólos de malha fechada $\sigma(A + BF) = \{-2, -1, -1 - j, -1 + j\}$. Pede-se projetar um observador de estado cujos pólos de $(A - KC)$ sejam os mesmos acima.

11ª Questão :

Complemente a teoria dada em aula (cap.12) :

(a) Mostrando que as equações do compensador baseado em observador na presença de uma perturbação não conhecida r(t) (que entra no sistema, mas não entra no observador) são dadas por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BF \\ KC & A - KC + BF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} v(t) + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

(b) Fazendo uma mudança de base na equação acima para as coordenadas $\begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix}$, mostre que as novas equações ficam da forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BF \\ 0 & A - KC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} v(t) + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix}$$

(c) Para $v(t) \equiv 0$, calcule a matriz de transferência considerando a entrada r(t) e a saída y(t). Note que os pólos do observador aparecem !!!

$12^{\underline{a}}$ Questão :

Um sistema de levitação magnética é composto de um mancal magnético que produz uma força $f = ki^2/(x^2)$, onde i é a corrente que entra no mancal, x é a distancia da entre a massa a ser levitada e o mancal magnético e k é uma constante que depende da geometria e do material do mancal magnético e da natureza do corpo a ser suspenso. Considere que a massa a ser suspensa é de 10 Kg, adote k=100 e a aceleração da gravidade igual a 10 (unidades SI). Pede-se :

a) Linearizar o sistema em torno do ponto de equilíbrio x_0 (com uma corrente i_0). Adote $x_0 = 0.5$ cm e note que i_0 é a corrente que produz a força peso para $x = x_0$.

b) Para o sistema linearizado, testar a controlabilidade e a observabilidade quando medimos somente a posição $y = (x - x_0)$ considerando a entrada $u = (i - i_0)$.

c) Para o sistema linearizado com entrada u e saída y, projete um compensador baseado em observador que imponha os pólos de $A + BF$ em $\{-10 - 10j, -10 + 10j\}$ e os pólos do observador em $\{-5 - 5j, -5 + 5j\}$. Se puder, simule o comportamento em malha fechada do sistema de controle com uma perturbação degrau de $0.01N$ agindo no sistema (simule o modelo do sistema não linear).

d) Refaça o projeto colocando um integrador em série com o sistema para garantir erro de regime nulo para a perturbação degrau (mostre que esta propriedade será satisfeita).

13ª Questão :
(a) Mostrar que a matriz de transferência de um sistema não depende da escolha da base que representamos o vetor de estado.
(b) Mostrar que a parte não controlável de um sistema não contribui para sua matriz de transferência. Idem para parte não observável.
Dica: Escrever o sistema em uma base adequada e aplicar a fórmula de inversão de matrizes de blocos (válida se A_{11} e A_{22} são não singulares):

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{11}^{-1} & -Q_{11}^{-1} Q_{12} Q_{12}^{-1} \\ 0 & Q_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

3ª Lista de Exercícios – Controle Multivariável
PTC 5746 – Prof. Paulo Sérgio
ESTA LISTA SE REFERE À SEGUNDA METADE DO CURSO

1ª Questão :

Diga se as matrizes abaixo são primas entre si à direita. Se as matrizes não forem primas entre si, forneça um MDCd. Repita o exercício em sua versão à esquerda.

a) $\begin{pmatrix} s & 0 \\ -s & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -(s+1)^2(s+2) \\ (s+2)^2 & (s+2) \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} s & 0 \\ -s(s+1)^2 & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (s+1)^2(s+2)^2 & 0 \\ 0 & s(s+2) \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 2s+1 & s^2+1 \\ (s+1)^2 & s^2+2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2s^2+3s+5 & s^2+4s+1 \\ s^2+5s-1 & s^2+s-1 \end{pmatrix}$.

2ª Questão :

2) Reduza as matrizes abaixo à forma de Smith. Para o ítem b), forneça as matrizes unimodulares que quando multiplicadas à esquerda e à direita pela matriz dada fornecem a sua forma de Smith.

a) $\begin{pmatrix} s+2 & s+1 & s+3 \\ s^3+2s^2+s & s^3+s^2+s & 2s^3+3s^2+s \\ s^2+3s+2 & s^2+2s+1 & 3s^2+6s+3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} s & s-1 & s+2 \\ s^2+s & s^2 & s^2+2s \\ s^2-2s & s^2-3s+2 & s^2+s-3 \end{pmatrix}$.

3ª Questão :

3) Reduza a equação abaixo à um par de equações desacopladas com auxílio da forma de Smith de T(p). Solucione a equação para condições iniciais arbitradas (escolha voce mesmo).

$$T(p)\xi(t) = 0 \text{ onde } T(p) = \begin{pmatrix} p^2+1 & -p \\ p & 1 \end{pmatrix}$$

Tal sistema é estável ?

4ª Questão :

Seja $T(p) = \begin{pmatrix} p & 4p+3 \\ -1 & p \end{pmatrix}$ e suponha $f(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$. Pede-se calcular, se fizer sentido :

a) $T(p)f(t)$.

b) $T^{-1}(p)f(t)$.

Repita os ítens acima para $T(p) = \begin{pmatrix} p^2+1 & -p \\ -p & 1 \end{pmatrix}$

$5^{\underline{a}}$ Questão :
O seguinte teorema é útil para solução da equação diofantina de polinômios $x(s)a(s) + y(s)b(s) = 1$.

Teorema de Sylvester : *Sejam $a(s)$ e $b(s)$ polinômios com $a(s)$ de grau n e $b(s)$ com grau $\leq n$. Escreva:*

$$a(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$$

$$b(s) = \sum_{i=0}^{n} b_i s^i$$

onde completamos os coeficientes de $b(s)$ com zeros no caso em que $b(s)$ possuir grau menor que n. Defina a matriz quadrada $S(a,b)$ de $2n$ linhas e $2n$ colunas por

$$S(a,b) = \begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-3} & 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{pmatrix}$$

Então $S(a,b)$ é não singular se e somente se o par de polinômios (a,b) é coprimo. Mais ainda, escrevendo os polinômios $x(s)$ e $y(s)$ de grau $n-1$ da forma :

$$x(s) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i s^i$$

$$y(s) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i s^i$$

então a solução da equação diofantina pode ser obtida a partir da equação

$$S(a,b)\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \\ x_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplique tal resultado para os polinômios $(s+1)^3$ e $(s-3)^3$.

6ª Questão :

Dada

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s-3)} & \frac{1}{(s-1)(s+2)} \\ \frac{s}{(s-1)} & \frac{1}{(s-1)(s-3)} \end{pmatrix}$$

pede-se:
a) Determinar a forma de Smith-Macmillan de $G(s)$. Determine as matrizes unimodulares que, quando multiplicadas à direita e a esquerda por $G(s)$, fornecem a forma de Smith-Macmillan de $G(s)$. Forneça o grau de McMillan de G(s) e seus pólos e zeros.
b) Forneça uma DMFd irredutível $\{\bar{N}, \bar{D}\}$ de G(s) como foi feito na demonstração da proposição 3.4 do Cap. 4. Lembremos que

$$\bar{N} = LN_1$$
$$\bar{D} = S^{-1}D_1$$

onde N_1 e D_1 são matrizes diagonais correspondentes ao numerador e denominador de Smith-Macmillan e L e S são matrizes unimodulares adequadas.
c) Obtenha uma DMFd irredutível $\{N, D\}$ de $G(s)$ onde D é de coluna reduzida. Para isso encontre uma matriz unimodular U tal que $D = \bar{D}U$, com D de coluna reduzida (vide prop. 5.3 do cap.4). Depois faça $N = \bar{N}U$, sendo que $\{\bar{N}, \bar{D}\}$ é a DMFd irredutível encontrada no ítem (b).
d) Resolva a equação matricial

$$XN + YD = I$$

onde $\{N, D\}$ é a DMFd irredutível pedida no ítem (c). Para isso note que podemos resolver uma equação "desacoplada"

$$X_1N_1 + Y_1D_1 = I$$

utilizando o exercício 5 e depois fazermos

$$\begin{gathered} X = U^{-1} X_1 L^{-1} \\ Y = U^{-1} Y_1 S \end{gathered}$$

(mostre porque isto é verdade).
e) Determine uma DMFe irredutível $\{A, B\}$ de $G(s)$ com $G = A^{-1}B$. Para isso utilize um método dual ao do utilizado no ítem (b).
f) Projete um compensador de estabilização para $G(s)$ que imponha todos os pólos de $P(s)$ em -2 e todos os pólos de $\Delta(s)$ em -1. Utilize os resultados dos ítens (c), (d) , e (e).

7ª Questão :
O problema a seguir justifica porque podemos supor sem perda de generalidade que o $\det T(p)$ é não nulo para descrições polinomiais. De fato, suponha que uma equação diferencial da forma (1) é dada

$$T(p)\xi(t) = U(p)u(t) \tag{1}$$

onde $T(p), U(p)$ são matrizes polinomiais respectivamente $r \times r$ e $r \times m$. Mostre que se $\det T(p) = 0$, então duas possibilidades podem ocorrer:

(a) As funções $u_1(t), \ldots, u_m(t)$ são soluções de uma equação diferencial linear (neste caso $u(t)$ não pode ser chamado de entrada visto que um vetor que não forneça solução para esta equação não seria admissível).

ou (exclusivo)

(b) A equação (1) pode ser reduzida a uma equação

$$\bar{T}(p)\bar{\xi}(t) = \bar{U}(p)u(t) \tag{2}$$

onde $\det \bar{T}(p)$ é não singular e (2) é tal que todas as soluções de (1) para $u(\cdot)$ aplicado sejam da forma

$$\xi(t) = M(p)\bar{\xi}(t) \tag{3}$$

onde $\bar{\xi}(t)$ é uma solução de (2) para o mesmo $u(\cdot)$ aplicado.
Dica: Sejam L, S unimodulares tais que $LTS = \Lambda$, onde Λ é a forma de Smith de $T(p)$. Defina $\bar{\xi}$ como sendo as primeiras l componentes $S^{-1}\xi$, onde l é o posto de $T(p)$ (sobre o corpo das frações racionais em p).

7ª Questão : (Vide Cap. 4 Apostila do curso PTC2513-Graduação)
Seja $G(s)$ uma matriz de transferência própria $l \times m$. Considere o seguinte método de obtenção de uma realização minimal (A, B, C, D) de $G(s)$.

1. Obtenha uma realização controlável (A_i, B_i, C_i, D_i) para i-ésima coluna de $G(s)$ (descreva como).

2. Construa o sistema $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ dado por:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_m \end{pmatrix}$$
$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_m \end{pmatrix} \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \cdots & D_m \end{pmatrix}$$

3. Extraia a parte observável (A, B, C, D) de $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$.
   Obs : Escrevendo o sistema numa base adequada, obtemos as matrizes

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \tilde{D}.$$

   Faça $A = A_{22}, C = C_2, B = B_2$ e $D = \tilde{D}$.

Pede-se mostrar que (A, B, C, D) é uma realização minimal de $G(s)$.
Dica : Para mostrar que (A, B, C, D) é uma realização de $G(s)$ use o exercício 13 da 2ª lista de exercícios. Para mostrar que (A, B, C, D) é controlável, use o exercício 4(a) da 2ª lista.

8ª Questão :

Dada

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+3}{(s+1)} & \frac{s+3}{(s+1)} \\ \frac{(s+3)+(s+1)}{(s+1)(s+2} & \frac{(s+3)(s+2)+2}{(s+1)(s+3)} \end{pmatrix}$$

pede-se:
a) Determinar a forma de Smith-Macmillan de $G(s)$. Determine os pólos, os zeros de transmissão e o grau de Smith-Macmillan de $G(s)$.
b) Usando o exercício 7, forneça uma realização minimal de $G(s)$.

9ª Questão :

Descreva o método dual do algoritmo descrito no exercício 7 para obtenção de uma realização minimal de uma matriz de transferência dada.