1ª Lista de Exercícios/Trabalho de Controle Não Linear
Prof. Paulo Sergio — 2018

ATENÇÃO: A LISTA DE EXERCÍCIOS NÃO SERÁ ENTREGUE! A LISTA DE EXERCÍCIOS SERVE PARA VOCÊ SE PREPARAR PARA PROVA! APENAS OS TRABALHOS VALEM NOTA E SÃO ENTREGUES
(veja o final do documento)

1ª Questão

Considere a equação linear

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} x$$

utilize

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

para expressar x_2 como função de x_1. Calcule a exponencial da matriz do sistema e compare os resultados obtidos.

2ª Questão

Determine a solução do problema de Cauchy para o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= e^{x(t)} \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Mostre que as soluções divergem em tempo finito.

3ª Questão

Considerando o modelo de um sistema térmico

$$\ddot{c} = u$$

conectado a um controle PD com chaveamento como na figura 1.

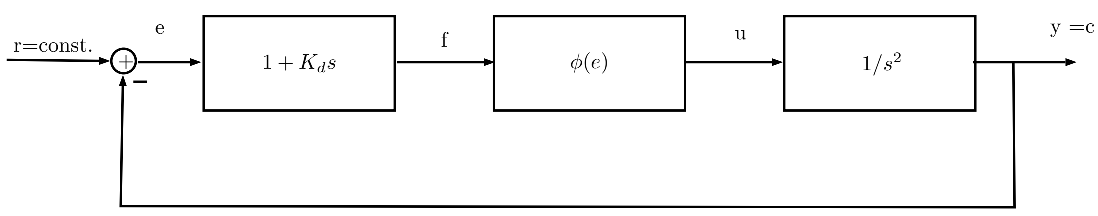

Figura 1: Simulation scheme for the closed loop system.

Pede-se esboçar as trajetórias no plano de fase (x_1, x_2) considerando $\dot{r} \equiv 0$, $x_1 = e$, $x_2 = \dot{e}$, $f = e + K_d\dot{e}$ e $u = \phi(f) = Msgn(f)$. A função $sgn(x)$ é nula quando $x = 0$, é igual a 1 quando $x > 0$ e é igual a -1 quando $x < 0$. Utilize o método de separação de variáveis

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}.$$

(integre em ambos os lados de $f_2 dx_1 = f_1 dx_2$). Voce deve analisar separadamente as regiões I (tal que $x_1 + K_d x_2 > 0$), e II (tal que $x_1 + K_d x_2 \leq 0$).

4ª Questão Considerando o modelo do servomecanismo linear:

$$J\ddot{c} + f_v \dot{c} = u$$

conectado como na figura 2

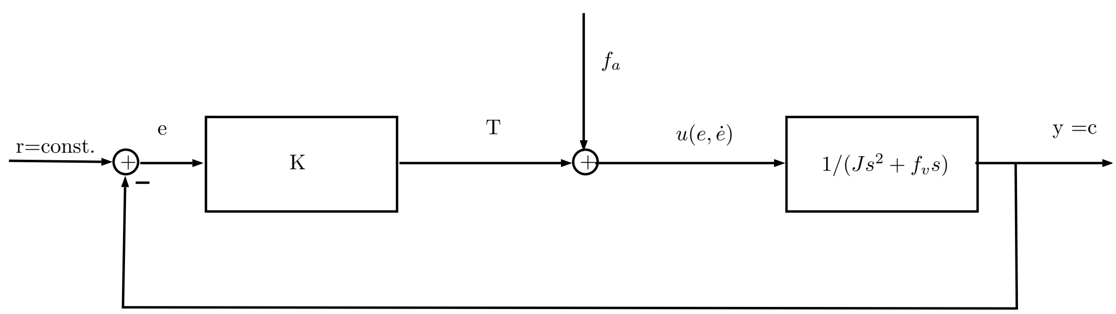

Figura 2: Simulation scheme for the closed loop system.

onde f_a é um torque de atrito tal que:
(i) Quando $\dot{c} \neq 0$, f_a tem sentido contrário a $\dot{c}$ e módulo f_c (atrito cinético).
(ii) O atrito f_a anula o torque T aplicado no motor quando a velocidade do eixo $\dot{c}$ é nula e $\|T\| < f_s$ (atrito estático).
(iii) Quando $\dot{c} = 0$ e $\|T\| \geq f_s$, o torque de atrito f_a tem sentido contrário a T e módulo f_s (atrito estático na iminência do movimento).
(a) Pede-se mostrar que

$$u(e, \dot{e}) = \begin{cases} Ke + f_c \mathrm{sgn}(\dot{e}), \dot{e} \neq 0 \\ 0, \dot{e} = 0, \|e\| \leq f_s/K \\ Ke - f_s \mathrm{sgn}(Ke), \dot{e} = 0, \|e\| < f_s/K \end{cases}$$

e que o modelo do sistema é da forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(1/\tau)x_2 - [1/(\tau f_v)]u(x_1, x_2) \end{aligned}$$

onde $x_1 = e$, $x_2 = \dot{e}$, $\tau = J/f_v$.
c) Considere as regiões I, II e III definidas respectivamente por $x_2 > 0$ e $x_2 < 0$ e $x_2 = 0$. Mostre que na região I o modelo do sistema é:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(1/\tau)x_2 - [K/(\tau f_v)]x_1 - f_c/(\tau f_v) \end{aligned}$$

na região II o modelo do sistema é:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(1/\tau)x_2 - [K/(\tau f_v)]x_1 + f_c/(\tau f_v)\end{aligned}$$

e na região III o modelo do sistema é:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 &= -[1/(\tau f_v)]U_s(x_1)\end{aligned}$$

onde $U_s(x_1) = 0$ se $\|x_1\| < f_s/K$ e $U_s(x_1) = Kx_1 - f_s\mathrm{sgn}(Kx_1)$ se $\|x_1\| \geq f_s/K$.
d) Mostrar que na região I (resp. II) o sistema se comporta como um sistema linear com ponto de equilíbrio $x_1 = -f_c/K, x_2 = 0$ (resp. $x_1 = +f_c/K, x_2 = 0$). Obtenha as novas equações lineares para I e II, transladando a origem das equações para os respectivos pontos de equilíbrio. Mostrar que a região $R = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0, \text{e } \|x_1\| < f_s/K\}$ é um conjunto de pontos de equilíbrio.

5º Exercício

(a) Seja M uma matriz de números reais de k linhas e m colunas, onde $k < m$. Suponha que as linhas de M são independentes (isto é, M possui posto k). Então M pode ser completada com $m - k$ linhas de modo a formar uma matriz invertível. (Dica: Depois de uma reordenação das colunas, podemos considerar que o determinante menor formado pelas primeiras k colunas é não nulo. Acrescente, após esta reordenação, os últimos $m - k$ vetores linha da base canônica. Reordene as colunas de forma a reobter a ordem original das colunas).

(b) Aplique esta idéia para mostrar que todo conjunto de k funçoes $\phi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, com $k \leq n$ tais que a matriz Jacobiana

$$J\phi = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{x_0}$$

tenha linhas independentes, pode ser completado com $m - k$ funções tais que estas n funções definam um difeomorfismo local em torno de x_0.

(c) Sejam $\phi_i, i = 1, 2$ duas funções definidas no $\mathbb{R}^4$ por $\phi_1 = (x_2 + 1)(x_1 + 1) + (x_3 + 1)(x_4 + 1)$ e $\phi_2 = (x_2 + 2)(x_1 + 3) + (x_3 + 1)(x_4 + 1)$. Construa duas funções ϕ_3 e ϕ_4 de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}$ tais que $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \phi_4(x))$ defina um difeomorfismo local em torno de $x_0 = (1, 2, 3, 4)$.

6º Exercício

Considere o modelo de pêndulo invertido

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{\alpha}{lm}x_2 + u\\ y &= x_1(t)\end{aligned}$$

onde u é a entrada do sistema (torque aplicado na base do pêndulo). Pede-se:
Projetar um controle, baseado na linearização exata do sistema, que rastreie a trajetória $\bar{y}(t) = \gamma e^{-\beta t}$. Pede-se que os pólos do sistema linearizado em malha fechada sejam $\{-10+j, -10-j\}$ e forneça um diagrama esquemático do sistema de controle.

7º Exercício

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_4\\ \dot{x}_2 &= x_4 e^{x_1} + x_3\\ \dot{x}_3 &= u_2\\ \dot{x}_4 &= u_1\\ \dot{x}_5 &= x_2 + x_1 u_2\\ y_1 &= x_1\\ y_2 &= x_2\end{aligned}$$

Pede-se:
(a) Uma lei de controle desacoplante e linearizante (entrada-saída somente), que garanta que os pólos em malha fechada estejam em $\{-1, -2\}$ para primeira saída e $\{-3, -4\}$ para segunda saída.
(b) A lei de controle desacoplande é solução do problema de linearização exata (internamente)? Caso contrário, escreva o sistema na forma normal, exibindo a dinâmica zero (dica, use o primeiro exercício).
(c) Repita o exercício, excluindo-se a equação $\dot{x}_5 = x_2 + x_1 u_2$ do modelo do sistema (neste caso não há dinâmica zero).

8º Exercício

Considere o Robô plano de dois graus de liberdade a seguir

Os dois discos escuros representam massas unitárias ($m_1 = m_2 = 1$) ligadas por braços de comprimento $l_1 = l_2 = 1m$. Podemos aplicar torques de controle τ_1 e τ_2, através de motores elétricos, de modo a controlar os graus de liberdade correspondendoa

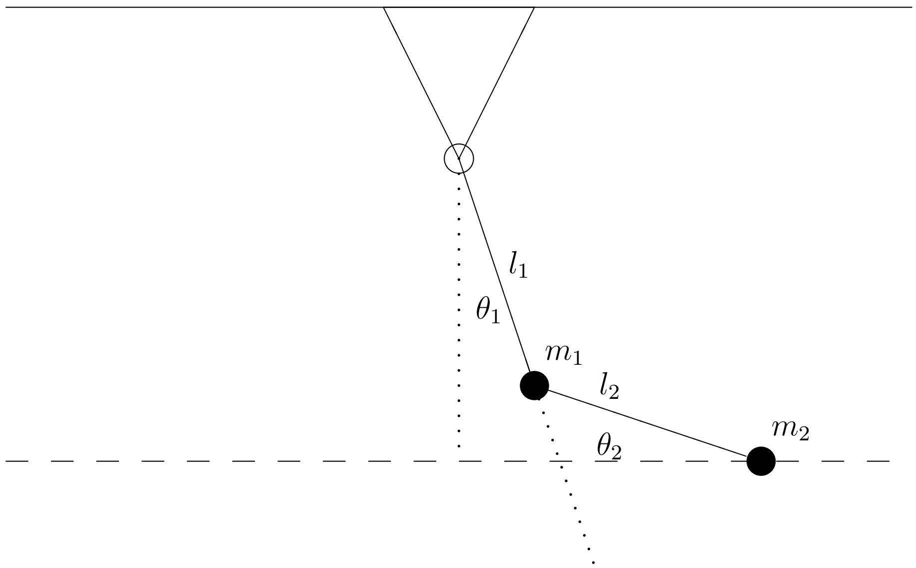

Figura 3: *Robô de dois graus de liberdade.*

θ_1 e θ_2. O modelo correspondente a este robô é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -M^{-1}(\theta)\left[C(\theta,\dot{\theta}) + K(\theta)\right] \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}(\theta) \end{pmatrix}\tau \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ é o vetor de deslocamentos angulares e $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ é o vetor dos torques aplicados pelos motores. Para estes valores de massa e comprimento, as matrizes M, K e C deste sistema são dadas por

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 3 + 2\cos\theta_2 & 1 + \cos\theta_2 \\ 1 + cos\theta_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} 2g\sin\theta_1 + g\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ g\sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

onde g é a constante de gravidade. Pede-se

(a) Mostrar que o problema de desacoplamento é solúvel para a saída $y(t)$ tal que

$$y_1 = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \tag{2}$$

$$y_2 = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \tag{3}$$

Note que $X = y_2$ e $Y = y_1$ são as coordenadas cartesianas X, Y do manipulador (massa m_2). Seja $u = \tau$ e $x = (\theta, \dot{\theta})$. Mostrar que (eu usei o programa de cálculo simbólico Mapple para fazê-lo) :

$$y^{(2)} = a(x) + A(x)u \tag{4}$$

Onde

$$A(x) = -\begin{bmatrix} \frac{-\sin(\theta_1)+\sin(\theta_1+2\,\theta_2)}{-3+\cos(2\,\theta_2)} & \frac{\sin(\theta_1)-3\,\sin(\theta_1+\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)-\sin(\theta_1+2\,\theta_2)}{-3+\cos(2\,\theta_2)} \\ \frac{\cos(\theta_1)-\cos(\theta_1+2\,\theta_2)}{-3+\cos(2\,\theta_2)} & \frac{-\cos(\theta_1)-\cos(\theta_1-\theta_2)+3\,\cos(\theta_1+\theta_2)+\cos(\theta_1+2\,\theta_2)}{-3+\cos(2\,\theta_2)} \end{bmatrix}$$

sendo que

$$\det(A(x)) = -2\sin(\theta_2)/(-3+\cos(2\theta_2))$$

Estudar as singularidades de $A(x)$ e interpretá-las fisicamente.

Primeiro Trabalho de Simulação (Parte I)

RECOMENDAÇÕES GERAIS:
ADOTE VALORES NUMÉRICOS QUANDO CONVIER;
FORNEÇA TODOS OS DIAGRAMAS DE SIMULAÇÃO E OUTROS PROGRAMAS UTILIZADOS.

1) **Este item é baseado no exercício 4 da primeira lista**.
QUEM APROVEITAR OS ESQUEMAS DO ANO PASSADO VAI SE DAR MAL!
Adote $K = 5$, $f_v = 1$, $f_c = 2$, $f_s = 2.1$, e $J = 4$.

Ao tentar simular o modelo do exercício 4, pode haver problemas numéricos devido à descontinuidade do modelo. Para contornar o problema, fixe $\epsilon > 0$ pequeno que voce escolherá (ϵ representará a precisão de velocidade que voce considerá nula). Pode ser preciso aumentar ϵ ou diminuir o passo de integração do programa de simulação, para conseguir bons resultados, Considere as regiões I, II e III definidas respectivamente por $x_2 > \epsilon$ e $x_2 < \epsilon$ e $x_2 \in [-\epsilon, \epsilon]$. Para simular conidere o sistema na região I definido por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(1/\tau)x_2 - [K/(\tau f_v)]x_1 - f_c/(\tau f_v)\end{aligned}$$

na região II o modelo do sistema é:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(1/\tau)x_2 - [K/(\tau f_v)]x_1 + f_c/(\tau f_v)\end{aligned}$$

e na região III o modelo do sistema é:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= -[1/(\tau f_v)]U_s(x_1)\end{aligned}$$

onde $U_s(x_1) = 0$ se $\|x_1\| < f_s/K$ (neste caso o sistema fica capturado num ponto dentro da faixa $\|x_1\| < f_s/K$ a menos de um erro de velocidade ϵ), ou ainda $U_s(x_1) = Kx_1 - f_s\text{sgn}(Kx_1)$ se $\|x_1\| \geq f_s/K$.

(a) Anexe a solução do exercício 5 da primeira lista.
(b) Simule as soluções do servomecanismo com atrito (se as respostas obtidas possui "bicos" é porque o passo de integração pode estar inadequado). Escolha pelo menos 12 condições iniciais diferentes. Apresente gráficos das trajetórias no espaço de estados, sendo que cinco delas devem interceptar o conjunto R de pontos de equilibrio. Tente obter uma figura semelhante à do Cap. 14 do livro do Nagrath. FORNEÇA AS CONDIÇÕES INICIAIS UTILIZADAS.

2) Seja $x \in \mathbb{R}$ e Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x^2(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

(a) Determine a solução analítica $x(t) = \phi(t; x_0, t_0)$ do problema de Cauchy acima.
(b) Adote $t_0 = 0$. Escolha 6 valores diferentes de x_0, três positivos e três negativos, e simule a solução, apresentando gráficos dos resultados $x(t)$ para $t \in [0, t_f]$, escolhendo adequadamente t_f. Muito cuidado para não tentar simular fora do intervalo de existência da solução, pois ela explode em tempo finito quando $x_0 > 0$!
(c) Seja $x_{0_i}, i = 1, 2, \dots 6$ as condições iniciais adotadas no item anterior. Sejam $x_i(t)$ as soluções correspondentes obtidas por simulação, e $\phi_i(t) = \phi(t; 0, x_{0_i})$ as soluções analíticas previstas pelo item (a). Apresente os 6 gráficos dos erros $e_i(t) = x_i(t) - \phi_i(t)$. Comente os resultados obtidos.

Primeiro Trabalho de Simulação (Parte II)

RECOMENDAÇÕES GERAIS:
ADOTE VALORES NUMÉRICOS QUANDO CONVIER;
FORNEÇA TODOS OS DIAGRAMAS DE SIMULAÇÃO E OUTROS PROGRAMAS UTILIZADOS.

Considere o oitavo exercício da 1ª lista de exercícios (Robô de dois graus de liberdade. Projete um controle de rastreamento para a trajetória $\bar{y}(t)$ (ao longo de uma reta horizontal) $\bar{y}_1 = A \sin 10t + B$, $\bar{y}_2 = A \cos 10t + C$, onde A, B, C serão escolhidos por voce de modo a evitar as singularidades. Escolha voce os pólos de malha fechada para que a trajetória praticamente tenda à trajetória de referência para um tempo menor que $2\pi/10$ segundos em cada caso.

(a) Fazer $A = 0$ (neste caso o controlador se resume a uma estabilização em torno de um ponto fixo). Escolher B e C e a condição inicial de modo a evitar a singularidade.

(b) Fazer $A > 0$ (neste caso vamos rastrear uma trajetória circular). Escolher A, B e C e a condição inicial de modo a evitar a singularidade.

Nas simulações acima apresente a saída y_1 versus y_2 (use XY Graph do Matlab) para que a trajetória do manipulador seja aferida. Apresente o comportamento dos erros de rastreamento $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ em função do tempo bem como de $\dot{e}(t)$. A condição inicial deve estar fora do ponto fixo no caso (a) e exterior ao círculo no caso (b).

Voce deve já ter feito download dos arquivos
`ajuda.m`,
`robot2018.mdl`, e `modelorobot.m`, da página da disciplina. O arquivo robot2018.mdl é uma sugestão de estrutura da simulação no MATLAB. O arquivo modelorobot.m é uma sugestão de como montar o modelo do robô, e inspirado neles, voce deve montar voce mesmo os outros arquivos geracao.m, yydot.m, controledesacoplante.m e um arquivo inicializa.m que será chamado antes da simulação para calcular a matriz de estabilização K. Note que robot2008.mdl possui a estrutura do controle estudado na teoria dada em sala, e portanto K é uma matriz 2×4, em uma forma de blocos dada por:

$$K = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}$$

O arquivo ajuda.m contém os valores das derivadas de y, de $A(x)$, e de $a(x)$ calculdos em um programa simbólico.