Cap. 5 — Estabilidade de Lyapunov

1 Motivação

Considere as equações diferenciais que modelam o oscilador harmônico sem amortecimento e sem força aplicada, dada por:

$$M\ddot{z} + Kz = 0$$

Escolhendo-se $x_1 = z$ e $x_2 = \dot{z}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K}{M}x_1 \end{aligned}$$

A função energia mecânica total é dada por $V(x) = \frac{1}{2}Kx_1^2 + \frac{1}{2}Mx_2^2$. Note que as curvas de nível $V(x) = r^2$ são elipses de semi-eixos $\sqrt{\frac{2r^2}{K}}$ e $\sqrt{\frac{2r^2}{M}}$. Seja $x(t)$ uma solução do sistema. Compondo $V(x)$ com $x(t)$ estaremos calculando a função V ao longo de uma trajetória $x(t)$. Note que $V(x(t))$ é uma função real de variável real e sua derivada, de acordo com a regra da cadeia será:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x(t)} \dot{x}(t)$$

ou seja

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = (Kx_1, Mx_2)\begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{K}{M}x_1 \end{bmatrix} = 0$$

Esta última equação nos diz que a energia mecânica se conserva e que as soluções do sistema estão sobre elipses com os semi-eixos dados acima, e determinados pela sua condição inicial. Como veremos, este sistema obedece a definição de estabilidade de Lyapunov, mas não é estável assintoticamente.

Considere agora o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1^2x_2 \end{aligned}$$

Considere a função $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $V(x) = x_1^2 + x_2^2$. Note que as curvas de nível $V(x) = r^2$ são círculos de raio r. Teremos

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = (2x_1, 2x_2)\begin{bmatrix} -x_1 + x_1x_2^2 \\ -x_2 - x_1^2x_2 \end{bmatrix} = -2x_1^2 - 2x_2^2$$

Note que a função $V(x(t))$ possui derivada estritamente negativa para todo $x(t)$ não nulo. Portanto, a intuição parece nos dizer que, se $t_1 > t_2 > t_3$, então $V(x(t_1)) <$

$V(x(t_2)) < V(x(t_3))$. O fato de que a trajetória evolui na direção das curvas de nível de valor decrescente parece indicar que as trajetórias devem convergir para a origem. Como veremos, prova-se que este sistema é estável assintoticamente.

O presente capítulo trata da formalização destas idéias conforme as teorias desenvolvidas por Lyapunov.

2 Definições de Estabilidade Segundo Lyapunov

Considere a equação diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

onde $f : D \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação Lipschitz e D é um aberto, onde $D \subset \mathbb{R}^n$. Lembremos que $\bar{x}$, onde $\bar{x} \in D$, é um ponto de equilíbrio de (1) se $f(\bar{x}) = 0$.

- Um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ é *estável* se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (δ depende de ϵ) tal que:

  $$\text{para todo } x_0 \in D \text{ tal que } \|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$$

  Em outras palavras, para qualquer condição inicial dentro de[1] $B_\delta(\bar{x})$, a solução correspondente não "sai" de $B_\epsilon(\bar{x})$

- Um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ é *localmente assintoticamente estável* se ele for estável e existir $\delta > 0$ tal que

  $$\text{para todo } x_0 \in D \text{ tal que } \|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}$$

  Em outras palavras, além da estabilidade, para toda condição inicial x_0 dentro de $B_\delta(\bar{x})$ a solução correspondente tende para o ponto de equilíbrio $\bar{x}$.

- Seja $D = \mathbb{R}^n$. Um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ é *globalmente assintoticamente estável* se ele for estável e ainda:

  $$\text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ temos } \lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}$$

  Em outras palavras, além da estabilidade, toda solução tende para o ponto de equilíbrio $\bar{x}$.

As definições acima admitem implicitamente que a solução $x(t)$ está definida para todo $t \geq t_0$. Para sermos mais precisos, deveríamos incluir isto na definição. O exercício abaixo mostra que isso não é muito necessário:

Exercício: Utilizar o teorema da saída do compacto (vide Cap. 3) para mostrar que estabilidade implica que a solução fica definida para todo t para x_0 suficientemente próximo de $\bar{x}$. ♣

[1] Lembre que $B_\delta(\bar{x})$ é a bola de raio δ e centro em $\bar{x}$.

3 Funções definidas, semi-definidas, positivas e negativas, locais e globais

Seja (1) uma sistema definido em D, onde $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Seja $\bar{x}$ um ponto de equilíbrio de (1). Seja $V : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Então damos as versões **locais** das definições:

- $V(x)$ é **localmente** *definida positiva* em torno de $\bar{x}$ se $V(\bar{x}) = 0$ e existe $B_\delta(\bar{x})$ tal que $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, com $x \in B_\delta(\bar{x})$.

- $V(x)$ é **localmente** *semi-definida positiva* em torno de $\bar{x}$ se $V(\bar{x}) = 0$ e existe $B_\delta(\bar{x})$ tal que $V(x) \geq 0$ para $x \neq 0$, com $x \in B_\delta(\bar{x})$.

- $V(x)$ é **localmente** *definida negativa* em torno de $\bar{x}$ se $-V(x)$ for *localmente definida positiva* em torno de $\bar{x}$.

- $V(x)$ é **localmente** *semi-definida negativa* em torno de $\bar{x}$ se $-V(x)$ for *localmente semi-definida negativa* em torno de $\bar{x}$.

Seja (1) uma sistema definido em D, com $D = \mathbb{R}^n$ e seja $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Então damos as versões globais das definições:

- $V(x)$ é **globalmente** *definida positiva* em torno de $\bar{x}$ se $V(\bar{x}) = 0$ e $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- $V(x)$ é **globalmente** *semi-definida positiva* em torno de $\bar{x}$ se $V(\bar{x}) = 0$ e $V(x) \geq 0$ para $x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

- $V(x)$ é **globalmente** *definida negativa* em torno de $\bar{x}$ se $-V(x)$ for definida positiva em torno de $\bar{x}$.

- $V(x)$ é **globalmente** *semi-definida negativa* em torno de $\bar{x}$ se $-V(x)$ for semi-definida negativa em torno de $\bar{x}$.

4 Teorema de Estabilidade de Lyapunov

Para enunciar os teoremas de Lyapunov, lançamos mão do fato de que, como visto na seção de motivação, dado um systema (1), para toda função $V : D \to \mathbb{R}$ e uma solução $x(t)$ podemos derivar a função composta $V(x(t))$ através da regra da cadeia:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x(t)} \dot{x}(t)$$

Aqui há uma sutileza não explicada na primeira seção. Aparentemente deveríamos conhecer a solução $x(t)$ para calcularmos $\frac{dV(x(t))}{dt}$. No entanto, como $\dot{x}(t) = f(x(t))$ para uma solução $x(t0$, podemos definir uma função $\dot{V} : D \to \mathbb{R}$ por

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1} ni = 1n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

Tal função pode ser calculada independentemente do conhecimento da solução $x(t)$. Ela tem a propriedade de que, se uma solução $x(t)$ passa num ponto x_1 num tempo t_1 então podemos escrever

$$\text{Se } x_1 = x(t_1) \;\Rightarrow\; \left.\frac{dV(x(t))}{dt}\right|_{t=t_1} = \dot{V}(x_1)$$

Teorema 1 *(Critério de estabilidade de Lyapunov) Seja (1) um sistema. Seja $\bar{x} \in D$ um ponto de equilíbrio. Seja $V : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Assuma que*

- *$V(x)$ é localmente definida positiva em torno de $\bar{x}$.*
- *$\dot{V}(x)$ é localmente semi-definida negativa em torno de $\bar{x}$.*

Então $\bar{x}$ é ponto de equilíbrio estável

Antes de demonstrar o teorema, definiremos o conceito de conjuntos (positivamente) invariantes. Esta definição será muito útil no estudo do Teorema de Invariância de LaSalle.

Definição 1 *Seja (1) um sistema definido em $D \in \mathbb{R}^n$. Seja $\Omega \subset D$ um subconjunto. Dizemos que Ω é (positivamente) invariante se para toda condição inicial $x_0 \in \Omega$ para todo $t \geq t_0$ tal que a solução estiver bem definida, temos $x(t) \in \Omega$.*

A aplicação do **teorema da saída do compacto** do Capítulo 3 permite mostrar o seguinte resultado (Exercício).

Proposição 1 *Se $\Omega \subset D$ é compacto e invariante, então toda solução $x(t)$ é global, isto é, é definida para todo $t \geq t_0$.*

Prova:(do Teorema 1)
Dado $\epsilon > 0$ vamos mostrar que existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ implica em $\|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon$.

Como D é aberto, tome $r \leq \epsilon$ suficientemente pequeno tal que $B_r(\bar{x}) \subset D$. Sem perda de generalidade (já que podemos diminuir um pouco o valor de r) vamos supor que a bola fechada $\bar{B}_r(\bar{x})$ está totalmente contida em D. Defina a **hiper-esfera** E_r por

$$E_r = \{x \in D \mid \|x - \bar{x}\| = r\}$$

e note que

$$\bar{B}_r(\bar{x}) = E_r \bigcup B_r(\bar{x})$$

Note que $K = E_r$ é um conjunto compacto (limitado e fechado). Lembre que toda função contínua quando restrita a um conjunto compacto K possui máximo e mínimo[2]

Seja

$$\alpha = \min_{x \in E_r} V(x) \tag{2}$$

É imediato que $\alpha \geq 0$, já que $V(x) \geq 0$. Mostremos que $\alpha > 0$. Se α fosse nulo, então $V(x_*)$ seria nulo para algum $x_* \in E_r$. Como $V(x)$ só se anula na origem e E_r não intercepta a origem, então só podemos ter $\alpha > 0$.

Agora tome $\beta > 0$ com $\beta < \alpha$. Defina

$$\Omega_\beta = \{x \in \bar{B}_r(\bar{x}) \mid V(x) \leq \beta\} \tag{3}$$

Exercício: Mostrar que Ω_β é fechado e limitado, portanto compacto. ♣

Mostraremos agora que $\Omega_\beta \subset B_r(\bar{x})$. Par mostrar isso, basta mostrar que ω_β não pode conter nenhum ponto de E_r. Assuma por absurdo que $x_1 \in \Omega_\beta$ com $x_1 \in E_r$. Então, de (2), segue-se que $V(x_1) \geq \alpha > \beta$. Logo $x_1 \notin \Omega_\beta$. Concluímos que

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r(\bar{x}) \mid V(x) \leq \beta\}$$

Mostremos que Ω_β é um conjunto invariante. Inicialmente, se a solução $x(t)$ estiver definida em $[t_0, T)$ é fácil ver que $x_0 \in \Omega_\beta$ implica que $x(t) \in \Omega_\beta$ para todo $t \in [t_0, T)$. De fato,

- Como $\dot{V}(x) \leq 0$, então $V(x(t))$ é não crescente, e portanto fica sempre inferior ou igual a β.
- Se $x(t)$ saísse de $B_r(\bar{x})$ seria necessário, por continuidade, que $\|x(t) - \bar{x}\|$ atingisse r para algum $t \geq t_0$. Neste caso, como já mostramos que $x(t) \in E_r$ implica em $V(x) \geq \alpha > \beta$, contrariando o fato de que $V(x(t))$ é não crescente.
- Pela Proposição 1 vemos que a solução fica definida para todo t, já que ω_β é compacto e invariante.

Vamos construir agora o $\delta(\epsilon)$ procurado, e concluir a prova. De fato, como $V(x)$ é contínua em $\bar{x}$, existe $\delta_1 > 0$ (que depende de β) tal que:

$$\|x - \bar{x}\| < \delta_1 \Rightarrow |V(x) - V(\bar{x})| < \beta \tag{4}$$

Como $V(\bar{x}) = 0$, o lado direito da última implicação pode ser reescrito como $|V(x)| < \beta$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, r\}$. Note que

$$\begin{array}{cccc} x_0 \in B_\delta(\bar{x}) & \overset{((4) \text{ e } (3))}{\Rightarrow} & x_0 \in \Omega_\beta & \overset{(\text{invariância})}{\Rightarrow} \\ x(t) \in \Omega_\beta & \overset{(3)}{\Rightarrow} & x(t) \in B_r(\bar{x}) \subset B_\epsilon(\bar{x}) & \end{array}$$

[2]Note que o teorema de existência do mínimo $\alpha = \min_{x \in R_r} V(x)$ garante que existe $x_* \in E_r$ tal que $\alpha = V(x_1)$.

Isso mostra a estabilidade de $\bar{x}$, concluindo a demonstração.

□

5 Teorema de Estabilidade Assintótica Local

O teorema a seguir garante a estabilidade assintótica quando as hipóteses do critério de estabilidade (Teorema 1) são reforçadas pelo fato de $\dot{V}$ ser definida negativa.

Teorema 2 *(Critério de estabilidade assintótica local) Seja (1) um sistema. Seja $\bar{x} \in D$ um ponto de equilíbrio. Seja $V : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Assuma que*

- *$V(x)$ é **localmente definida positiva** em torno de $\bar{x}$.*
- *$\dot{V}(x)$ é **localmente definida negativa** em torno de $\bar{x}$.*

*Então $\bar{x}$ é ponto de equilíbrio **localmente assintoticamente estável**.*

OBSERVAÇÃO. Sem perda de generalidade vamos supor que V está definida em D e que $\dot{V}$ é negativa definida em D. Caso contrário, se V tem domínio D_1 e $\dot{V}$ é negativa definida em D_2, devemos restringir os sistemas ao novo domínio $\tilde{D} = D \cap D_1 \cap D_2$.

A prova do Teorema anterior será baseada em dois resultados auxiliares (Lemas 1 e 2):

Lema 1 *Assuma que existem $r > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\bar{B}_r(\bar{x}) \subset D$ e o conjunto Ω_β definido por*

$$\Omega_\beta = \{x \in \bar{B}_r(\bar{x}) | V(x) \leq \beta\}$$

é compacto e invariante (vide Definição 1). Nas condições do Teorema 2 então $x_0 = x(t_0) \in \Omega_\beta$ implica em $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$.

Prova: (do Lema 1)

Seja $x_0 \in \Omega_\beta$ e $x(t)$ a solução correspondente

- Pela Proposição 1 temos que toda solução com condição inicial Ω_β é global.
- A função $h : [t_0, \infty) \to [0, \infty)$ definida por $h(t) = V(x(t))$ é não crescente e limitada inferiormente (por zero). Então mostra-se que existe $c = \lim_{t\to\infty} V(x(t))$ e $c \geq 0$. **(Exercício)**
- Suponha por absurdo que $c > 0$. Pela continuidade de V em $\bar{x}$ vemos que

$$\exists d > 0, \text{tal que } \|x - \bar{x}\| < d \Rightarrow \|V(x) - V(\bar{x})\| = |V(x)| < c/2.$$

- **Por continuidade, prova-se que $x(t)$ sai de $B_d(\bar{x})$ para t suficientemente grande.** Em outras palavras, como $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = c > 0$, por continuidade existe $T > 0$ tal que $t \geq T$ implica em $x(t)$ não pertence a $B_d(\bar{x})$ para todo $t \geq T$.

  OBS. Para mostrar isso basta tomar T tal que $t \geq T$ implica em $|V(x(t)) - c| < c/2|$. Isto implica claramente que $|V(x(t))| > c/2$.

- Considere o conjunto compacto $K = \{x \in D \mid d \leq \|x\| \leq r\}$.
  Note que $\dot{V}$ definido por $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$ é uma aplicação contínua $\dot{V} : D \to \mathbb{R}$. Portanto tal função admite máximo em K. Seja

  $$-\gamma = \max_{x \in K} \dot{V}(x)$$

  Pela definição de γ, como $\dot{V}$ é definida negativa em D, teremos

  $$-\gamma \leq \dot{V}(x) \leq 0, \text{para todo } x \in K$$

  Em particular $-\gamma \leq 0$.

- Como $\dot{V}$ é negativo para $x \neq \bar{x}$ e $\bar{x} \notin K$, segue-se que $-\gamma < 0$ e $\dot{V}$ não se anula em K. De fato, se γ fosse nulo, existira $x^* \in K$ tal que $\dot{V}(x^*) = -\gamma = 0$, contrariando o fato de que $\dot{V}$ não se anula em K.

- Note que para $t \geq T$ teremos $x(t)$ dentro de K. Pelo teorema fundamental do cálculo podemos escrever

  $$\begin{aligned} V(x(t)) &= V(x(T)) + \int_T^t \dot{V}(x(\tau))d\tau \\ &\leq V(x_0) - \gamma(t - T) \end{aligned}$$

  Para t suficientemente grande, (por exemplo $t > T + V(x_0)/\gamma$) provaríamos que $V(x(t))$ seria negativa, chegando a um absurdo. Logo $c = 0$, terminando a demonstração.

$\square$

Lema 2 *Seja $V : D \to \mathbb{R}$ contínua e definida positiva em torno de $\bar{x}$. Seja $\bar{B}_r(\bar{x}) \subset D$. Seja $x : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que $x(t) \in \bar{B}_r(\bar{x})$ para todo $t \in [t_0, \infty)$. Então, se $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$, temos $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$.*

Prova:(do Lema)

- Suponha que a afirmacão é falsa, isto é, suponha que existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $T > t_0$ existe $t > T$ tal que $\|x(t) - \bar{x}\| \geq \epsilon$.

- Como $x(t) \in \bar{B}_r(\bar{x})$, temos que $\epsilon \leq r$.

- Seja $K = \{x \in D \mid \epsilon \leq \|x - \bar{x}\| \leq r\}$. Note que K é compacto e $\bar{x} \notin K$.

- Defina $h = \min_{x \in K} \; V(x)$. Por argumentos semelhantes aos usados na prova do Lema 1, mostra-se que o fato de V ser positiva definida e $\bar{x} \notin K$, implica em $h > 0$.

- Logo existe $a > 0$ (por exemplo $a = h$) tal que, qualquer que seja $T > t_0$ temos que existe $t \geq T$ tal que

$$\|V(x(t)) - V(\bar{x})\| = V(x(t)) \geq a = h$$

  Isso contraria o fato de $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$.

□

Agora estamos prontos para apresentar a prova do Teorema 2.

Prova: (do Teorema 2 O ponto de equilíbrio $\bar{x}$ é estável pelo teorema anterior. Resta mostrar que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x_0 \in B_\delta(x_0)$ tenhamos que a solução $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ é tal que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$.

□

6 Teorema de estabilidade assintótica global

Uma noção fundamental no estudo da estabilidade assintótica global é o conceito de função V radialmente ilimitada, isto é, uma função que tende para infinito em todas as direções.

Definição 2 *(Função Radialmente Ilimitada) Seja $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Dizemos que V é radialmente ilimitada (em torne de $\bar{x}$) se* $\lim_{\|x-\bar{x}\|\to\infty} V(x) = +\infty$. *Em outras palavras:*

> *Para todo $M > 0$, existe $R > 0$ tal que*
> $\|x - \bar{x}\| > R \Rightarrow V(x) > M$

Exercício: Mostrar que se V é radialmente ilimitada, para todo $\beta > 0$ o conjunto $\Omega_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq \beta\}$ é compacto. ♣

Teorema 3 *(Critério de estabilidade assintótica global) Seja (1) um sistema definido em $D = \mathbb{R}^n$. Seja $\bar{x} \in D$ um ponto de equilíbrio. Seja $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Assuma que*

- *$V(x)$ é **globalmente definida positiva** em torno de $\bar{x}$.*
- *$\dot{V}(x)$ é **globalmente definida negativa** em torno de $\bar{x}$.*
- *$V(x)$ é **radialmente ilimitada**.*

*Então $\bar{x}$ é ponto de equilíbrio **globalmente assintoticamente estável**.*

7 Teorema de Invariância de LaSalle

Dada uma condição inicial x_0 de (1), seja $x : I \to \mathbb{R}^n$ a solução maximal correspondente, onde $I = [t_0, T)$ pode ser um intervalo finito ou infinito. Uma trajetória é a imagem da solução maximal, isto é, é o conjunto $\mathcal{T}_{x_0} = \{z \in \mathbb{R}^n \,| z = x(t), t \in I\}$.

Definição 3 *Dado um sistema (1), e um conjunto $E \subset D$, o maior conjunto invariante M contido em E é a união de todas as trajetórias contidas em E.*

Teorema 4 *(Teorema de Invariância de LaSalle) Seja (1) um sistema. Seja $V : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 (não necessariamente positiva definida). Assuma que exista um compacto invariante $K \subset D$.*

- *$\dot{V}(x)$ é **semi-definida negativa** dentro de K.*
- *Seja $E = \{x \in K \mid \dot{V}(x) = 0\}$. Seja M o maior conjunto invariante contido em E.*

Então para toda condição inicial $x_0 \in K$ teremos $\lim_{t\to\infty} dist(x(t), M) = 0$. Em outras palavras, a solução $x(t)$ se aproxima arbitrariamente de M quando $t \to \infty$.

O teorema de invariância de LaSalle possui duas conseqüências importantes:

Teorema 5 *(Consequência do teorema de LaSalle — versão local) Seja (1) um sistema e seja $\bar{x}$ um ponto de equilíbrio. Seja $V : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1.*

- *Seja $\beta > 0$. Defina $K = \{x \in D \mid V(x) \leq \beta\}$. Assuma que K é um conjunto compacto.*
- *Suponha que $V(x)$ é **definida positiva** dentro de K (note que isso implica $\bar{x} \in K$) .*
- *Suponha que $\dot{V}(x)$ é **semi-definida negativa** dentro de K.*
- *Seja $E = \{x \in K \mid \dot{V}(x) = 0\}$. Seja M o maior conjunto invariante contido em E.*

Assuma que $M = \{\bar{x}\}$. Então $\bar{x}$ é estável e para toda condição inicial $x_0 \in K$ teremos $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$. Em particular, $\bar{x}$ é localmente assintoticamente estável.

Teorema 6 *(Conseqüência do teorema LaSalle — versão global) Seja (1) um sistema definido em $D = \mathbb{R}^n$ e seja $\bar{x}$ um ponto de equilíbrio. Seja $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Assuma que*

- *$V(x)$ é* ***globalmente definida positiva****.*
- *$\dot{V}(x)$ é* ***globalmente semi-definida negativa****.*
- *$V(x)$ é* ***radialmente ilimitada****.*

Seja $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$. Seja M o maior conjunto invariante contido em E. Assuma que $M = \{\bar{x}\}$. Então $\bar{x}$ é globalmente assintoticamente estável.