

# Cap. 4 — Linearização Exata e Flatness

## 1 Introdução e Motivação

Este capítulo estuda brevemente o problema de linearização exata via mudança de coordenadas e realimentação de estado. De fato, veremos que para uma certa classe de sistemas não-lineares, existe uma realimentação de estado (não-linear) que permite o cancelamento exato das não-linearidades do sistema. Neste caso, o sistema em malha fechada torna-se linear, pelo menos quando ele for descrito em um sistema de coordenadas adequado. Dividimos esta seção introdutória em duas subseções. Na primeira seção tratamos de uma versão do problema de rastreamento. A primeira subseção também aborda uma questão filosófica. Esta questão reside no fato de que os sinais de referência do tipo degrau são adequados como sinais de teste de desempenho, mas são em geral inadequados para o controle de sistemas. Isto contraria os paradigmas do ensino de controle clássico, que estabelece a entrada degrau como um bom candidato a sinal de referência. A segunda subseção apresenta dois exemplos de sistemas linearizáveis.

### 1.1 O problema de rastreamento

Considere um motor-DC linear cujo modelo é dado abaixo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

onde  $u(t)$  é a tensão externa aplicada no motor-DC em Volts,  $x_1$  é a posição angular do eixo em radianos, e  $x_2$  é a velocidade angular do eixo, e  $y(t) = x_1(t)$  é a saída do sistema. Nosso objetivo de controle é o posicionamento do eixo do motor que parte do repouso<sup>1</sup> de um ângulo  $\theta_0$  em  $t = t_0$ , e desejamos que o eixo deste motor atinja o ângulo  $\theta_f$  em  $t = t_f$ . Este é o sistema de posicionamento típico que é denominado de *servo-mecanismo*.

Uma realimentação  $u(t) = K(v(t) - y(t))$ , onde  $v(t)$  é a nova entrada, fornece o sistema em malha fechada:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) - Kx_1(t) + Kv(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Este sistema é da forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t)$$

---

<sup>1</sup>Em particular  $\dot{\theta}(t_0) = 0$ .

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}$$

Os autovalores<sup>2</sup> de  $A$  são as raízes do polinômio característico  $\pi(s) = s^2 + s + K$ , dadas por  $\frac{-1 \pm \sqrt{1-4K}}{2}$ . Não é difícil de mostrar que a parte real destas raízes são sempre negativas, demonstrando a estabilidade do sistema em malha fechada.

O posicionamento pode ser obtido então pela colocação da entrada degrau  $v(t) = \theta_f$ , onde  $\theta_f$  é a ângulo final desejado. De fato o único ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada para  $v(t) = \theta_f$  é dado por

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \theta_f \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para mostrar isto basta mostrar que a única solução do sistema linear  $A\bar{x} + Bv = 0$  é o vetor  $\bar{x}$  dado acima. Esta forma de solucionar o problema é adequada quando não há muitas restrições sobre o comportamento de  $y(t) = \theta(t) = x_1(t)$  entre os instantes inicial e final, sendo que estamos preocupados somente com o posicionamento nos instantes inicial e final.

Suponhamos que além do posicionamento nos instantes final e inicial desejamos também controlar a saída  $y(t)$  entre os instantes inicial e final. E outras palavras, dado um perfil desejado  $\bar{y}(t)$  definido num intervalo  $[0, \infty)$  gostaríamos que a saída real  $y(t)$  seguisse a saída desejada com erro  $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$  que tenda a zero quando  $t$  tende para infinito. Este problema é denominado de problema de rastreamento da saída  $\bar{y}(t)$ .

Para resolver o problema de rastreamento vamos projetar um sistema de controle que garanta que a dinâmica do erro  $e(t)$  seja estável. Para isso assuma que a saída desejada  $\bar{y}$  é de classe  $C^2$ . Seja  $e^{(0)}(t) = e(t)$  e  $\frac{d^k}{dt^k} e(t) = e^{(k)}(t)$ . Teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{(0)}(t) &= e^{(1)}(t) = y^{(1)}(t) - \bar{y}^{(1)}(t) \\ &= x_2(t) - \bar{y}^{(1)}(t) \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{(1)}(t) &= \dot{x}_2(t) - \bar{y}^{(2)}(t) \\ &= -x_2(t) + u(t) - \bar{y}^{(2)}(t) \end{aligned}$$

Agora considere a lei de controle

$$u(t) = x_2(t) + \bar{y}^{(2)}(t) - \alpha e^{(0)} - \beta e^{(1)}$$

Então a dinâmica do erro será descrita pela equação linear

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e^{(0)} \\ e^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(0)} \\ e^{(1)} \end{bmatrix}$$

---

<sup>2</sup>Para os alunos que cursaram a disciplina de Controle I, não é difícil de obter os mesmos resultados a partir de funções de transferência e o teorema do valor final.

cujos autovalores são as raízes do polinômio característico  $\pi(s) = s^2 + \beta s + \alpha$ . Igualando este polinômio a  $(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)$ , obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\alpha &= -(\lambda_1 + \lambda_2) \\ \beta &= \lambda_1 \lambda_2\end{aligned}$$

que podem ser usadas para imposição de autovalores (pólos) da dinâmica do erro. Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  possuem partes reais negativas, e dinâmica do erro será assintoticamente estável, e o problema de rastreamento será solucionado.

## 1.2 Exemplo de sistema linearizável

**Exemplo 1:** Considere o seguinte sistema não linear com estado  $x = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$  e entrada  $u(t) \in \mathbb{R}$  da forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2(1 + x_1^2 + x_2^2) + (1 + x_1^2 + x_2^2)u\end{aligned}$$

a realimentação de estado  $u(t) = \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}[-x_1^2+v(t)]$ , onde  $v(t)$  é a nova entrada externa, permite cancelar perfeitamente a não linearidade, obtendo o sistema linear invariante no tempo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= v\end{aligned}$$

Este sistema é da forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 2:** Considere o seguinte sistema não linear com estado  $x = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$  e entrada  $u(t) \in \mathbb{R}$  da forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2/(1 + x_1)^2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_2^2 x_1}{(1+x_1^2)^2} + (1 + x_1^2) \left( \frac{x_2^2}{(1+x_1^2)^2} + (1 + x_1^2) u \right)\end{aligned}$$

Considere a mudança de coordenadas  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $z = (z_1, z_2) = \phi(x_1, x_2)$ , onde  $z_1 = x_1$  e  $z_2 = x_2/(1 + z_1^2)$ . Note que a aplicação  $\phi$  possui inversa  $\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $x = (x_1, x_2) = \phi^{-1}(z_1, z_2)$ , onde  $x_1 = z_1$  e  $x_2 = z_2(1 + z_1^2)$ . Portanto  $\phi$  é um difeomorfismo. Assim, nas novas coordenadas  $z$  teremos, aplicando a regra da cadeia

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x(t)} \right) \dot{x}(t) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x(t)} \Big|_{x(t)} f(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Substituindo  $x(t) = \phi^{-1}(z(t))$  obtemos

$$\dot{z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} f(\phi^{-1}(z), u)$$

Note que a equação acima é da forma

$$\dot{z}(t) = g(z(t), u(t))$$

e representa a expressão do mesmo sistema nas novas coordenadas  $z$ . Fazendo os cálculos anteriores no exemplo acima, vamos obter

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_2^2 + (1 + z_1^2)u\end{aligned}$$

E fazendo a realimentação não linear  $u = -z_2^2/(1 + z_1^2) + v/(1 + z_1^2)$  onde  $v$  é a nova entrada, vamos obter o sistema em malha fechada:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= v(t)\end{aligned}$$

Este sistema é da forma

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vê-se que este sistema é linear e invariante no tempo. Conclui-se que uma transformação de coordenadas  $z = \phi(x)$  e uma realimentação de estado não linear<sup>3</sup>  $u = \alpha(x, v)$  pode cancelar exatamente a não linearidade do sistema. Isto dá origem ao seguinte problema:

**Definição 1 Problema de linearização exata:** *Encontrar uma realimentação de estado e uma mudança de coordenadas tais que o sistema em malha fechada, quando escrito nessas novas coordenadas seja linear e controlável.*

<sup>3</sup>Ou equivalentemente,  $u = \alpha(\phi(z), v) = \beta(z, v)$ .

## 2 Linearização entrada-saída e desacoplamento

Nesta seção veremos a conexão entre o problema de linearização exata e o problema de desacoplamento. Consideraremos sistemas da forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = h(x(t)) \quad (1b)$$

onde  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^\infty$ , e  $g(x)$  é uma matriz  $n \times m$

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21}(x) & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n1}(x) & g_{n2} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix}$$

onde todas as funções  $g_{ij}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são de classe  $C^\infty$ . Denotando por  $g_j(x)$  a coluna  $j$  de  $g(x)$  podemos considerar  $g_j$  como uma aplicação  $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e reescrever (1a)-(1b) como

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{j=1}^m u_j(t)g_j(x(t)) \quad (2a)$$

$$y(t) = h(x(t)) \quad (2b)$$

Neste capítulo, consideraremos leis de controle denominadas de *realimentação de estado estática localmente regular* (em  $U \subset \mathbb{R}^n$ ), dadas por

$$u(t) = \alpha(x(t)) + \beta(x(t))v(t) \quad (3)$$

onde  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é de classe  $C^\infty$ , e  $\beta$  é uma matriz  $m \times m$  dada por

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21}(x) & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{n1}(x) & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mm} \end{bmatrix}$$

onde as todas as funções  $\beta_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$  são de classe  $C^\infty$ . A palavra *regular* aqui significa que a matriz  $\beta$  é invertível dentro de uma região de operação, que é um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Em particular, para todo  $x \in U$ , temos  $\det \beta(x) \neq 0$ .

Note que o sistema em malha fechada é dado por

$$\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t)) + \tilde{g}(x(t))u(t) \quad (4a)$$

$$y(t) = h(x(t)) \quad (4b)$$

onde

$$\tilde{f} = f + g\alpha$$

e

$$\tilde{g} = g\beta$$

## 2.1 O problema de desacoplamento

Seja um sistema (1) com entrada  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$  e saída  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))^T$ . O problema de desacoplamento consiste na construção de uma realimentação de estado regular (3) cuja nova entrada  $v(t) = (v_1(t), \dots, v_m(t))$  promove o controle independente das saídas. Em outras palavras, a componente da entrada  $v_j$  só atua na saída  $y_j$ , não influenciando a saída  $y_i$  para  $i$  diferente de  $j$ . Se isto ocorre para todo  $j = 1, \dots, m$ , dizemos que o sistema em malha fechada (4) é desacoplado.

**Problema de desacoplamento.** Seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  um ponto de operação<sup>4</sup>. Dizemos que o problema de desacoplamento é localmente solúvel em torno de  $x_0$  se existir uma vizinhança aberta  $U \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $x_0$  e uma realimentação regular (3) tal que o sistema em malha fechada (4) seja desacoplado.

Veremos que a derivação sucessiva das saídas com relação ao tempo nos leva a uma solução para o problema de desacoplamento. Para isso considere que tomamos uma componente da saída  $y_i(t)$  e a derivamos no tempo. Pela regra da cadeia, como  $y_i(t) = h \circ x(t)$  teremos:

$$y_i^{(1)}(t) = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \right|_{x(t)} \dot{x}(t)$$

Substituindo (1a) na equação acima, teremos:

$$y_i^{(1)}(t) = \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \right|_{x(t)} [f(x(t)) + g(x(t))u(t)]$$

Sejam

$$\begin{aligned} h_i^1 &= \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \right|_{x(t)} f(x(t)) \\ A_i^1 &= \left. \frac{\partial h_i}{\partial x} \right|_{x(t)} g(x(t)). \end{aligned}$$

obtemos

$$y_i^{(1)}(t) = h_i^1(x(t)) + A_i^1(x(t))u(t), \quad i = 1, \dots, m.$$

Assuma que  $A_i^1(x)$  é identicamente nulo na região de operação  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Neste caso, dentro de  $U$ ,  $y_i^{(1)}$  não será instantaneamente afetado por  $u(t)$ , pois neste caso teremos

$$y_i^{(1)}(t) = h_i^1(x(t))$$

Repetindo o mesmo procedimento para  $y_i^{(1)}$ , vamos obter

$$y_i^{(2)}(t) = h_i^2(x(t)) + A_i^2(x(t))u(t), \quad i = 1, \dots, m.$$

---

<sup>4</sup>Aqui  $x_0$  pode não coincidir com a condição inicial.

Assuma que  $A_i^2(x)$  é identicamente nulo na região de operação  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Neste caso, dentro de  $U$ ,  $y_i^{(2)}$  não será instantaneamente afetado por  $u(t)$ . Defina  $\rho_i$  como o menor inteiro tal que  $A_i^{\rho_i}(x)$  não seja identicamente nulo em  $U$ . O inteiro  $\rho_i$ , denominado de **grau relativo** da saída  $y_i$ , é o *número de derivações no tempo que temos que realizar para que a saída dependa explicitamente de alguma componente da entrada*. Assuma que todas as componentes da saída  $y$  admitem grau relativo. Podemos então escrever:

$$y_i^{(\rho_i)}(t) = a_i(x(t)) + A_i(x(t))u(t)$$

onde  $a_i = h_i^{\rho_i}$  e  $A_i = A_i^{\rho_i}$ . Sejam

$$a(x) = \begin{bmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ \vdots \\ a_m(x) \end{bmatrix}$$

e

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \\ \vdots \\ A_m(x) \end{bmatrix}$$

Note que  $a_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^\infty$  e  $A_i$  é um vetor linha de  $m$  funções de classe  $C^\infty$ . Desta forma  $a(x)$  é um vetor coluna de  $m$  funções de classe  $C^\infty$  e  $A(x)$  é uma matriz  $m \times m$  de funções  $C^\infty$  denominada de **matriz de desacoplamento**.

Podemos enunciar duas versões de solução do problema de desacoplamento, cujas demonstrações são semelhantes. A primeira versão não se preocupa com o tamanho da região aberta em torno de  $x_0$  para o qual existe solução para o problema.

Note que o grau relativo  $\rho_i$  de uma saída  $y_i$  pode variar com o ponto de trabalho. De fato considere o exemplo abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_2 u \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Derivando-se  $y$  teremos:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= x_2 + x_2 u \\ y^{(2)} &= u + (x_2 + x_2 u)u + x_2 u^{(1)} \end{aligned}$$

Para  $x_2 \neq 0$  vemos que a primeira derivada de  $y$  depende explicitamente de  $u$ . Para  $x_2 = 0$  a primeira derivada de  $y$  não depende explicitamente de  $u$  pois

$$\left. \frac{\partial y^{(1)}}{\partial u} \right|_{x_2=0} = x_2|_{x_2=0} = 0$$

Logo, o grau relativo  $\rho_i$  não fica bem definido em regiões contendo pontos onde  $x_2$  se anula. Em  $x_2 = 0$  temos que derivar a saída duas vezes para obtermos  $\frac{\partial y^{(2)}}{\partial u} \neq 0$ .

**Definição 2** Dizemos que um sistema (1) admite grau relativo em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , se todas as componentes da saída  $y_i, i = 1, \dots, m$  admitirem grau relativo  $\rho_i$  finito e constante dentro da região  $U$ .

**Teorema 1** O problema de desacoplamento é localmente solúvel em torno de  $x_0$  se e somente se o sistema admite grau relativo e o determinante da matriz de desacoplamento não se anula em  $x_0$ .

A próxima versão do teorema especifica uma região aberta  $U \subset \mathbb{R}^n$  onde existe solução para o problema de desacoplamento. Faremos o esboço da demonstração da suficiência desta segunda versão.

**Teorema 2** O problema de desacoplamento é localmente solúvel em uma região aberta  $U \subset \mathbb{R}^n$  se e somente se o sistema admite grau relativo e o determinante da matriz de desacoplamento  $A(x)$  não se anula para todo  $x$  pertencente a  $U$ .

Para esboçar a demonstração da suficiência da condição acima, note que:

$$\begin{aligned} y_1^{(\rho_1)} &= a_1(x) + A_1(x)u \\ y_2^{(\rho_2)} &= a_2(x) + A_2(x)u \\ &\vdots \\ y_m^{(\rho_m)} &= a_m(x) + A_m(x)u \end{aligned}$$

Lembre que  $A_i$  é a  $i$ ésima linha da matriz  $A$ . Denotando-se

$$y^{(\rho)} = (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)}, \dots, y_m^{(\rho_m)})^T$$

podemos escrever:

$$y^{(\rho)} = a(x) + A(x)u. \quad (5)$$

onde  $a(x)$  é um vetor coluna de funções de  $x$  e  $A(x)$  é uma matriz  $m \times m$  de funções de  $x$ , dados por

$$a(x) = \begin{bmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ \vdots \\ a_m(x) \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \\ \vdots \\ A_m(x) \end{bmatrix},$$

Defina a realimentação de estado

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (6a)$$

onde

$$\alpha(x) = -A(x)^{-1}a(x) \quad (6b)$$

$$\beta(x) = A(x)^{-1}. \quad (6c)$$



Em malha fechada vamos obter

$$y^{(\rho)} = v \tag{7}$$

ou seja

$$y_1^{(\rho_1)} = v_1 \tag{8a}$$

$$y_2^{(\rho_2)} = v_2 \tag{8b}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$y_m^{(\rho_m)} = v_m. \tag{8c}$$

Note que cada equação  $y_i^{(\rho_i)} = v_i$  é linear e completamente desacoplada de outra equação  $y_j^{(\rho_j)} = v_j$  para  $i \neq j$ . Em outras palavras, é claro que a evolução de  $y_i$  não depende de  $v_j$  para  $j \neq i$ . Logo a realimentação definida acima fornece solução para o problema de desacoplamento.

Note que se a matriz de desacoplamento  $A(x)$  for invertível para  $x \in U$  então a solução proposta acima promoverá o desacoplamento dentro de  $U$  (isto é, enquanto a solução  $x(t)$  não sair de  $U$ , garantimos que a lei de controle está bem definida e o sistema é desacoplado). Isto mostra que a condição do Teorema 2 é suficiente.

Suponha agora que  $\det A(x_0) \neq 0$ . Note que a aplicação  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  definida por

$$x \mapsto A(x)$$

é de classe  $C^\infty$ , e portanto é contínua.

Denote o conjunto das matrizes  $n \times n$  de números reais por  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Denote por  $\det : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$  a função que associa uma matriz  $n \times n$  a seu determinante. Mostra-se que  $\det$  é uma função contínua (por ser a soma de produtos dos elementos da matriz). Considere a aplicação  $\det A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$x \mapsto \det A(x)$$

Esta função é contínua, pois ela é a composta de “det” com “A”, e a composta de aplicações contínuas é contínua. Em particular o conjunto

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \det A(x) \neq 0\}$$

é um aberto do  $\mathbb{R}^n$  contendo  $x_0$ . Isto mostra que a condição do Teorema 1 é suficiente para que o desacoplamento seja localmente possível em torno de  $x_0$ .

A demonstração da necessidade pode ser encontrada em [2, 4, 3].

## 2.2 Forma normal

Nesta seção mostraremos que se todas as saídas  $y_i$  admitem grau relativo  $\rho_i$  e a matriz de desacoplamento  $A(x_0)$  é invertível, então existe um aberto  $U$  contendo  $x_0$  tal que o sistema se escreve de uma forma especial, denominada de *Forma Normal*. Como veremos, a *forma normal* possui duas partes. A primeira é o *subsistema entrada-saída*,

que pode ser *desacoplado e linearizado*, e a segunda parte, que é o *subsistema não observável* para saída, que é também denominado de *dinâmica zero*. Veremos que a *dinâmica zero* é o sistema que obtemos quando acrescentamos a restrição “ $y(t) \equiv 0$ ” ao sistema original.

Para obtenção da *forma normal*, usaremos um teorema básico de análise, que é o *teorema da função inversa*. Sejam  $U$  e  $V$  abertos do  $\mathbb{R}^n$ . Lembremos que uma aplicação diferenciável  $\phi : U \rightarrow V$  que admite inversa diferenciável  $\psi : V \rightarrow U$ , é denominada de *difeomorfismo* ou *mudança de coordenadas locais*, se assim preferirem.

**Teorema 3** (*Teorema da função inversa*) *Seja  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$ , sendo  $A$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $J(x) = \frac{\partial F}{\partial x}$  a matriz Jacobiana da aplicação. Assuma que  $\det J(x_0) \neq 0$  para algum  $x_0 \in A$ . Seja  $y_0 = F(x_0)$ . Então existe uma vizinhança aberta  $U_{x_0}$  contendo  $x_0$  e uma vizinhança aberta  $V_{y_0}$  contendo  $y_0$  tal que a aplicação  $\phi : U_{x_0} \rightarrow V_{y_0}$  definida por  $\phi(x) = F(x)$  é um difeomorfismo.*

Note que no enunciado do teorema dizer que  $\phi$  é a mesma aplicação que  $F$  seria um abuso de notação. De fato, o domínio destas aplicações não coincidem em geral (nem o contradomínio), pois na maioria dos casos  $U_{x_0}$  é um subconjunto aberto próprio de  $A$  e  $V_{y_0}$  é um subconjunto aberto próprio de  $\mathbb{R}^n$ .

Para a demonstração do teorema, o seguinte resultado auxiliar é fundamental.

**Lema 1** *Assuma que o sistema (1) possui grau relativo em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $x_0$  e  $\det A(x_0) \neq 0$ . Considere a aplicação  $z : U \rightarrow \mathbb{R}^\rho$ , onde  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i$  definida por<sup>5</sup>:*

$$z(x) = (y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_m^{(0)}, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(\rho_m-1)}) \Big|_x. \quad (9)$$

*Então as  $\rho$  linhas da matriz Jacobiana  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x_0}$  são linearmente independentes (note que tal matriz é  $\rho \times n$ ).*

Uma demonstração geométrica deste resultado pode ser encontrada em [3].

**Teorema 4** (*Forma Normal*) *Assuma que o sistema (1) possui grau relativo em um aberto contendo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (vide Definição 2). Assuma que  $\det A(x_0) \neq 0$ . Então existe uma mudança de coordenadas local  $\xi = \phi(x)$ , onde  $\psi : U_{x_0} \rightarrow V_{\xi_0}$  é um difeomorfismo local tal que*

- $\psi(x) = (z(x), \eta(x))$ , onde  $z(x)$  é definido por (9).
- $\eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_{m-\rho}(x))^T$  pode ser sempre escolhido como um conjunto de funções (eventualmente lineares) tais que as linhas da matriz Jacobiana  $N = \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x_0}$  completam as linhas da matriz Jacobiana  $Z = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x_0}$  de modo a formar  $n$  linhas linearmente independentes. Em particular a matriz

$$T = \begin{bmatrix} Z \\ N \end{bmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x_0}$$

*é invertível.*

---

<sup>5</sup>Por definição  $y_i^{(k)}$  depende apenas de  $x$  para  $k$  menor que  $\rho_i$

- Nas coordenadas  $\xi = (z, \eta)$  o sistema em malha aberta se expressa localmente por (FORMA NORMAL EM MALHA ABERTA):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_i^{(0)}}{dt} = y_i^{(1)} \\ \frac{dy_i^{(1)}}{dt} = y_i^{(2)} \\ \vdots \\ \frac{dy_i^{(\rho_i-1)}}{dt} = a_i(x) + A_i(x)u \end{array} \right\}, i = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

$$\dot{\eta} = \gamma(z, \eta) + \delta(z, \eta)u$$

- Nas coordenadas  $\xi = (z, \eta)$  o sistema em malha fechada com a lei de desacoplamento 6 se expressa localmente por (FORMA NORMAL EM MALHA FECHADA):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_i^{(0)}}{dt} = y_i^{(1)} \\ \frac{dy_i^{(1)}}{dt} = y_i^{(2)} \\ \vdots \\ \frac{dy_i^{(\rho_i-1)}}{dt} = v_i \end{array} \right\}, i = 1, 2, \dots, m \quad (11a)$$

$$\dot{\eta} = \tilde{\gamma}(z, \eta) + \tilde{\delta}(z, \eta)v \quad (11b)$$

**Prova:** Seja  $\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i$ , a soma dos graus relativos das saídas. Pelo Lema 1, temos que a matriz  $\rho \times n$  dada por  $Z = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x_0}$  possui linhas independentes. Em particular existe um determinante menor  $\rho \times \rho$  não nulo. Sem perda de generalidade, a menos de reordenação das componentes de  $x$  (ou equivalentemente, uma reordenação das colunas de  $Z$ ), assumamos que  $Z$  é da forma:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix}$$

onde  $Z_1$  é matriz  $\rho \times \rho$  invertível. Seja  $x_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_\rho}, x_{0_{\rho+1}}, \dots, x_{0_n})$ . Seja  $w = (x_{\rho+1}, x_{\rho+2}, \dots, x_n)$  e  $w_0 = (x_{0_{\rho+1}}, \dots, x_{0_n})$ . Em outras palavras  $w$  é o subvetor das últimas  $n - \rho$  coordenadas de  $x$  e  $w_0$  é o subvetor das últimas  $n - \rho$  coordenadas de  $x_0$ . Seja  $\eta = w - w_0$ . Por construção:

$$N = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-\rho} \end{bmatrix}$$

Defina a aplicação  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $x \mapsto (z(x), \eta(x))$ . Por construção, a matriz Jacobiana de  $\psi$  calculada em  $x_0$  será dada por:

$$M = \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x_0} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ 0 & I_{n-\rho} \end{bmatrix}$$

A partir da forma bloco triangular de  $M$ , mostra-se que

$$\det M = (\det Z_1)(\det I_{n-\rho}) = \det Z_1 \neq 0$$

Portanto, pelo teorema da função inversa,  $\psi$  é um difeomorfismo local em sua imagem, pelo menos quando restrito a um aberto  $U_0$  conveniente, com  $x_0 \in U_0$ . Por construção é fácil mostrar que (10) e (11) são satisfeitas em  $U_0$ .  $\square$

### 2.3 A dinâmica zero e a estabilização do sistema

Assuma que escolhemos uma condição inicial e uma entrada tais que, a saída  $y(t)$  obtida de (11) é identicamente nula. Portanto todas as derivadas de  $y$  de qualquer ordem seriam também nulas. Em particular teríamos  $z$  e  $v$  identicamente nulos. O sistema dinâmico (11) se reduziria portanto a:

$$\dot{\eta} = \tilde{\gamma}(0, \eta) \quad (12)$$

O sistema dinâmico (12) é denominado de Dinâmica Zero. Nesta seção mostraremos que a dinâmica zero<sup>6</sup> possui importância para o problema de estabilização.

Para isso note que cada subsistema (11a) é um sistema linear da forma

$$\dot{z}_i = A_i z_i + B_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

onde  $z_i = (y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(\rho_i-1)})^T$ , e

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Tal sistema linear é essencialmente a conexão em cascata de  $\rho_i$  integradores, fornecendo um sistema cuja saída é  $y_i$  e os componentes do estado são obtidos derivando-se  $\rho_i$  vezes a saída  $y_i$ , e obtendo-se sucessivamente  $y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(\rho_i-1)}$ , até pararmos em  $y_i^{(\rho_i)} = v_i$ . Mostra-se que este sistema possui  $\rho_i$  pólos em  $s = 0$  (ou equivalentemente os autovalores de  $A_i$  são todos nulos com multiplicidade  $\rho_i$ ).

Tal sistema pode ser estabilizado por uma realimentação de estado

$$v_i = F_i z_i \quad (14)$$

projetada como se segue (ver Cap. 5 da apostila de controle multivariável). Seja  $\Lambda_i = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\rho_i}\}$  o conjunto de pólos desejados. Seja

$$\pi_i(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_{\rho_i})$$

o polinômio característico em malha fechada. Escreva

$$\pi_i(s) = s^{\rho_i} - \sum_{k=0}^{\rho_i-1} a_k s^k$$

---

<sup>6</sup>Nas seções seguintes ficará claro que a inexistência da dinâmica zero implicará na solubilidade do problema de linearização exata. Mais ainda a dinâmica zero é diretamente relacionada aos sistemas implícitos.

Prova-se que a realimentação (matriz linha)

$$F_i = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{\rho_i-1}]$$

fornece<sup>7</sup>

$$\sigma(A_i + B_i F_i) = \Lambda_i = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\rho_i}\}$$

Agrupando todas as realimentações estabilizantes (14) para  $i = 1, \dots, m$ , obtemos

$$v = Fz \tag{15}$$

onde

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_m \end{bmatrix}$$

e

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T$$

O resultado a seguir é uma condição suficiente para solução do problema de desacoplamento com estabilidade em malha fechada.

**Teorema 5** [3] *Assuma que  $(z_0, \eta_0)$  é ponto de equilíbrio de (11), onde  $z_0 = 0$  e  $v = v_0 = 0$ . Assuma que a dinâmica zero linearizada é estável. Então o sistema (11) em malha fechada com a realimentação (15) é desacoplado e localmente assintoticamente estável.*

Note que no sistema (1) (que é equivalente a (10)) aplicamos inicialmente a lei de controle desacoplante (6) e depois a lei de controle estabilizante (15) que corresponde à aplicação de  $v_i = F_i z_i$  em cada subsistema desacoplado.

**Observação :** (Sistemas de fase não-mínima) Um sistema cuja dinâmica zero (12) é instável é denominado de *sistema de fase não mínima*. Tais sistemas não podem ser estabilizados por leis de controle que desacoplem e estabilizem o subsistema entrada-saída do sistema não linear.  $\diamond$

**Observação :** (Ausência de dinâmica zero) Quando a dinâmica zero é ausente (isso ocorre se  $s = n - \sum_{i=1}^m \rho_i = 0$ ), fica claro que a lei de controle do Teorema 5 implica na estabilidade assintótica local do ponto de equilíbrio  $x_0$ . Na próxima seção exploraremos a ausência de dinâmica zero como condição para para solução do problema de linearização exata.  $\diamond$

---

<sup>7</sup>Note que  $\sigma(A)$  denota o conjunto de autovalores de  $A$ .

## 2.4 O problema de linearização exata

Nesta seção trataremos do problema de linearização exata que foi enunciado no início deste capítulo (vide Definição 1).

**Teorema 6** *Seja um sistema da forma (1a). Assuma que a matriz  $g(x)$  possui, para todo  $x$ , posto igual ao seu número  $m$  de colunas. Então o problema de linearização exata (vide Def. 1) é solúvel em um aberto  $U_0$  contendo  $x_0$  se e somente se existir uma saída  $y = h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))^T$  com  $m$  componentes tal que:*

- O sistema possui grau relativo em  $U_0$ .
- A matriz de desacoplamento  $A(x)$  é não singular em  $U_0$ .
- Há ausência de dinâmica zero, ou seja,  $s = n - \sum_{i=1}^m \rho_i = 0$ .

**Prova:** O fato de que tais condições são suficientes é uma consequência imediata do Teorema 4. De fato, excluindo-se a equação (11b) de (11) obtemos um sistema linear. Para uma prova da necessidade<sup>8</sup>, consulte [3].  $\square$

Uma consequência do teorema anterior é que, se a linearização exata for possível em torno de um ponto de equilíbrio, então a estabilização deste ponto de equilíbrio pela aplicação das realimentações desacoplante (6) e estabilizante (15) é sempre possível.

## 2.5 “Flatness”, linearização exata, e controlabilidade

Nesta seção faremos a conexão entre o problema de linearização exata e o conceito de “flatness” (ou de planitude, que segundo o dicionário Houaiss é a propriedade de ser plano). O conceito de “flatness” foi cunhado por Fliess *et al.* [1] a partir dos resultados que apresentamos neste capítulo sobre linearização exata. Existem várias maneiras equivalentes de enunciar a propriedade de *flatness*. O leitor interessado pode consultar por exemplo [5].

**Definição 3** *Um sistema (1) é plano, se existir um conjunto  $y = (y_1, \dots, y_m)$  de funções de classe  $C^\infty$ , denominado de saída plana (ou saída flat) que possui as seguintes propriedades:*

- $y_i = h_i(x)$  são funções do estado<sup>9</sup>  $x$ . **A dimensão  $m$  de  $y$  é o número de entradas do sistema.**

---

<sup>8</sup>Em [3] há um critério de existência de  $y = h(x)$  através do cálculo dos *colchêtes de Lie* dos campos  $f$  e de  $g$  que definem (1).

<sup>9</sup>Para simplificar a exposição, consideraremos que  $y$  depende apenas do estado  $x$ . Na verdade, o conceito de flatness é muito mais geral, sendo que  $y$  pode depender também da entrada e de suas derivadas até uma certa ordem finita.

- O estado  $x$  pode ser determinado a partir de  $y$  e de suas derivadas. Em outras palavras<sup>10</sup>, existe uma aplicação  $\mathcal{A}$  tal que:

$$x = \mathcal{A}(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\gamma)}) \quad (16)$$

- A entrada  $u$  pode ser determinada a partir de  $y$  e de suas derivadas. Em outras palavras, existe uma aplicação  $\mathcal{B}$  tal que:

$$u = \mathcal{B}(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\delta)}) \quad (17)$$

**Teorema 7** *Todo sistema linearizável por realimentação regular de estado (3) é plano (flat).*

**Prova:** Pelo Teorema 6, podemos aplicar uma lei de controle linearizante

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (18)$$

Note que, de (8)-(7), podemos escrever

$$v = (y_1^{(\rho_1)}, \dots, y_m^{(\rho_m)})^T \quad (19)$$

Pelo Teorema 4, existe um difeomorfismo local  $\psi$  que leva  $x$  em  $(z, \eta)$ . Pelo Teorema 6 temos  $s = n - \sum_{i=0}^m \rho_i = 0$ . Em particular,  $\eta$  está ausente pois a dimensão  $s$  de  $\eta$  é nula. Logo  $z = \psi(x)$  é um difeomorfismo local. Em particular  $x = \psi^{-1}(z)$ . Lembremos que

$$z = (y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_m^{(0)}, \dots, y_m^{(\rho_m-1)})^T \quad (20)$$

Em particular,

$$x = \psi^{-1}(z) = \mathcal{A}(z). \quad (21)$$

Assim,  $x$  pode ser escrito como função de  $y$  e suas derivadas até uma ordem finita  $\gamma = \max\{\rho_1 - 1, \dots, \rho_m - 1\}$ . De (18), (19), (20), (21), segue-se que

$$u = \alpha(\mathcal{A}(z)) + \beta(\mathcal{A}(z))v = \mathcal{B}(y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\delta)})$$

onde  $\delta = \max\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  □

Na introdução deste capítulo foi considerado o problema de rastreamento de um motor elétrico. Neste capítulo, este problema será generalizado para sistemas linearizáveis. Para isto, dado um perfil desejado  $\bar{y}(t)$  da saída  $y(t)$  do sistema (1), onde  $\bar{y}(t)$  é definido num intervalo  $[0, \infty)$  gostaríamos que a saída real  $y(t)$  seguisse a saída desejada com erro  $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$  que tenda a zero quando  $t$  tende para infinito. Este problema é denominado de problema de rastreamento da saída  $\bar{y}(t)$ . Para resolver o problema de

---

<sup>10</sup>Aqui não estamos sendo precisos porque a definição de *flatness* é local, e as aplicações  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  abaixo podem estar definidas localmente, e não globalmente

rastreamento vamos projetar um sistema de controle que garanta que a dinâmica do erro  $e(t)$  seja estável. Antes de resolvermos o problema de rastreamento, note que a noção de flatness está diretamente relacionada com este problema, e este problema também está diretamente ligado ao problema de controlabilidade do sistema não linear. De fato, imagine que desejamos levar o sistema de uma condição inicial  $x_0$  até uma condição final  $x_T$  num tempo  $T$ . A solução deste problema recai na construção de uma aplicação  $\bar{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , de classe  $C^\infty$  denominada saída desejada, que obedeça às seguintes restrições:

$$(A) \quad x_0 = \mathcal{A}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\gamma)}(t))|_{t=0}.$$

$$(B) \quad x_T = \mathcal{A}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\gamma)}(t))|_{t=T}.$$

**Teorema 8** *Assuma que o sistema (1) é plano (flat). A aplicação da entrada*

$$u(t) = \mathcal{B}(\bar{y}^{(0)}(t), \bar{y}^{(1)}(t), \dots, \bar{y}^{(\delta)}(t))$$

onde  $\bar{y}$  obedece as restrições (A) e (B) anteriores, leva o sistema de  $x_0$  em  $t = 0$  até  $x_T$  em  $t = T$ . Em particular, se um sistema é plano, ele possui garantidamente uma propriedade de controlabilidade.

**Observação :**

- O problema de controlar um sistema flat com a lei de controle acima é que tal lei de controle é de “malha aberta”. Uma estratégia de controle em malha fechada deve ser capaz de corrigir erros de condição inicial, de modelagem, de influência de perturbações etc.
- Para quem já fez o curso de robótica do Prof. Jaime, note que a noção de *flatness* para robôs (que são atuados em todas as juntas) é análoga ao *método do torque calculado*.
- Mostra-se que existem sistemas flat que não são linearizáveis por realimentação estática (3). No entanto mostra-se que todo sistema flat é linearizável por realimentação dinâmica [1, 5]. O problema de mostrar que todo sistema que é linearizável por realimentação dinâmica é *flat* é ainda um problema aberto da teoria de controle.

◇



## 2.6 Exemplos de sistemas planos

- Todo sistema linearizável por realimentação estática é flat (Teorema 6).
- Voltando ao exemplo da seção 1.1 o motor é um sistema flat com saída flat  $y = x_1$ , pois o estado deste sistema é  $x = \mathcal{A}(y, \dot{y}) = (y, \dot{y})^T$  e do fato de  $\ddot{y} = -\dot{y} + u$  temos que a sua entrada é dada por  $u = \mathcal{B}(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \ddot{y} + \dot{y}$ .
- Todo sistema linear controlável é flat (vide [1]).
- Todo robô com  $n$  graus de liberdade e atuação em todas as juntas é flat. De fato, a equação de movimento de um robô de  $n$  graus de liberdade é da forma:

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + C(q(t), \dot{q}(t)) + K(q(t)) = u(t) \quad (22)$$

onde  $M$  é a matriz de massa  $n \times n$ , que é sempre simétrica e invertível,  $C$  é a matriz dos efeitos de Coriolis e atritos viscosos,  $K$  é a matriz dos efeitos de mola e de gravidade,  $q(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de posições generalizadas,  $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de velocidades generalizadas, e  $u(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de forças generalizadas. A equação 22 pode ser reescrita da forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (23a)$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (23b)$$

$$f = \begin{bmatrix} -M^{-1}[C + K] \end{bmatrix} \quad (23c)$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \quad (23d)$$

Neste caso, fica claro que  $y = q$  é uma saída flat, já que  $x$  e  $u$  se escrevem em função de  $q$  e suas derivadas. É um exercício simples mostrar a partir de (23) que todos os graus relativos  $\rho_i$  das componentes  $y_i = q_i$  da saída são iguais a dois, e a matriz de desacoplamento  $A(x)$  é dada por  $A(x) = M^{-1}$ . Em particular, o robô é linearizável por realimentação estática, já que a dimensão do estado  $x$  é  $2n$  e  $s = 2n - \sum_{i=1}^n \rho_i = 0$ . É importante ressaltar que as coordenadas generalizadas  $q$  em geral não são as coordenadas  $y = h(q)$  do efetuador. Mais adiante vamos considerar também a cinemática  $y = h(q)$  do efetuador.

## 2.7 Rastreamento de sistemas linearizáveis

Voltemos ao problema de rastreamento da saída  $y(t)$ , que se refere a um perfil desejado  $\bar{y}(t)$  da saída  $y(t)$  do sistema (1), onde  $\bar{y}(t)$  é definido num intervalo  $[0, \infty)$ , e gostaríamos que a saída real  $y(t)$  seguisse a saída desejada com erro  $e(t) = y(t) - \bar{y}(t)$  que tenda a

zero quando  $t$  tende para infinito. Note que, se um sistema é flat e  $y(t)$  é uma saída flat, então a equação (16) garante que fazer  $y(t)$  seguir  $\bar{y}(t)$  determina completamente o estado  $x(t)$  do sistema. Para sistemas flat, o problema de rastreamento da saída se confunde então com o problema de controlar o seu estado.

Restrigiremos nosso estudo à classe dos sistemas (1) que são linearizáveis por realimentação estática.

Para isso, derivando sucessivamente  $e_i(t)$  com relação ao tempo obtemos:

$$e_i^{(k)}(t) = y_i^{(k)}(t) - \bar{y}_i^{(k)}(t), \quad i = 1, 2, \dots, m, k \in \mathbb{N}$$

fazendo  $k = \rho_i$  para  $i = 1, \dots, m$  e usando (8) teremos

$$e^{(\rho)} = y^{(\rho)} - \bar{y}^{(\rho)} = a(x) + A(x)u - \bar{y}^{(\rho)}$$

onde denotamos

$$\begin{aligned} y^{(\rho)} &= (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)}, \dots, y_m^{(\rho_m)})^T \\ \bar{y}^{(\rho)} &= (\bar{y}_1^{(\rho_1)}, \bar{y}_2^{(\rho_2)}, \dots, \bar{y}_m^{(\rho_m)})^T \\ e^{(\rho)} &= (e_1^{(\rho_1)}, e_2^{(\rho_2)}, \dots, e_m^{(\rho_m)}) \end{aligned}$$

Note que a lei de controle

$$u = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{(\rho)} + v] \quad (24)$$

onde  $v = (v_1, \dots, v_m)^T$  é a nova entrada, produz em malha fechada a dinâmica linear

$$e^{(\rho)} = v.$$

A lei de controle (24) é portanto uma realimentação linearizante para dinâmica do erro. Podemos proceder como na seção 2.3 para construir uma realimentação estabilizante da dinâmica do erro. Seja  $\epsilon_i \in \mathbb{R}^{\rho_i}$  definido por

$$\epsilon_i = (e_i^{(0)}, e_i^{(1)}, \dots, e_i^{(\rho_i-1)})^T$$

Então é fácil ver que a dinâmica do erro  $e_i$  é governada pela equação linear

$$\dot{\epsilon}_i = A_i \epsilon_i + B_i v_i \quad (25)$$

onde  $A_i$  e  $B_i$  são dados por (13).

Assim uma lei de controle

$$v_i = F_i \epsilon_i$$

análoga à da seção 2.3, pode estabilizar a dinâmica do erro. Em particular, a lei de controle estabilizante possui a forma:

$$v = F \epsilon$$

onde

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_m \end{bmatrix}$$

e

$$\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m)^T$$

Note que

$$\epsilon = y^{(\rho-1)} - \bar{y}^{(\rho-1)}$$

onde

$$\begin{aligned} y^{(\rho-1)} &= (y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_m^{(0)}, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\rho_m-1)})^T \\ \bar{y}^{(\rho-1)} &= (\bar{y}_1^{(0)}, \bar{y}_1^{(1)}, \dots, \bar{y}_1^{(\rho_1-1)}, \dots, \bar{y}_m^{(0)}, \bar{y}_1^{(1)}, \dots, \bar{y}_1^{(\rho_m-1)})^T \end{aligned}$$

**Teorema 9** *Assuma que o sistema (1) é tal que*

- *A saída  $y$  possui grau relativo;*
- *A matriz de desacoplamento  $A(x)$  é invertível em um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ ;*
- *A dinâmica zero está ausente, isto é,  $s = n - \sum_{i=1}^m \rho_i = 0$ .*
- *A aplicação  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  que mapeia<sup>11</sup>  $x$  em  $z(x)$  ( $z$  é definido em (20)) é um difeomorfismo em sua imagem. Denote por  $V = \psi(U)$  a imagem de  $\psi$  (mostre que  $V$  é aberto).*

*Assuma que  $\bar{y}(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma saída desejada de classe  $C^\infty$  tal que*

$$\bar{z}(t) = (\bar{y}_1^{(0)}(t), \dots, \bar{y}_1^{(\rho_1-1)}(t), \dots, \bar{y}_m^{(0)}(t), \dots, \bar{y}_m^{(\rho_m-1)}(t))^T \in V, \forall t \in [t_0, \infty) \quad (26)$$

*Seja  $\bar{x}(t) = \psi^{-1}(z(t))$  e assuma que existe  $H > 0$  tal que*

$$\text{dist}(\bar{z}(t), \partial V) > H, \forall t \in [t_0, \infty)$$

*Seja*

$$\epsilon_0 = z(x_0) - \bar{z}(t_0)$$

*o erro inicial da trajetória no espaço das coordenadas  $z$ .*

*Assuma que aplicamos no sistema a lei de controle (24) e (25). Então existe  $\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que, se  $\|\text{dist}(\epsilon_0, \partial V)\| > \delta$  teremos que  $x(t)$  não sai de  $U$  para todo  $t$  e ainda*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y^{(k)}(t) - \bar{y}^{(k)}(t) = 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

*Em particular  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - \bar{x}(t) = 0$ .*

<sup>11</sup>As demonstrações acima garantem apenas que a aplicação  $\psi$  é um difeomorfismo local, mas pode por exemplo não ser injetivo em  $U$ .

**Prova:** Faremos apenas o esboço da prova. Primeiramente, dado um sistema linear

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}(t) &= \tilde{A}\epsilon(t), \\ \epsilon(t_0) &= \epsilon_0\end{aligned}$$

estável assintoticamente, existe  $K > 0$  e  $\mu > 0$  tal que, para todo  $\epsilon_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\|\epsilon(t)\| \leq Ke^{-\mu t}\|\epsilon_0\|$$

Tome  $\delta = H/K$ . Não é difícil mostrar que as propriedades acima são satisfeitas para este  $\delta$ , e que não há possibilidade da trajetória  $x(t)$  passar por singularidades da lei de controle (pontos nos quais  $\det A(x)$  se anularia).  $\square$

**Observação :** Quando  $U = V = \mathbb{R}^n$  temos convergência global.  $\diamond$

**Exemplo :** Voltando ao exemplo do robô com atuação em todas as juntas, tínhamos mostrado que o modelo do robô é

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

onde

$$\begin{aligned}x &= \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \\ f &= \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}[C + K] \end{bmatrix} \\ g &= \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Assuma que a cinemática direta do robô é dada por

$$y(t) = h(q(t))$$

e que  $h : W \rightarrow Y$  é invertível, com Jacobiano  $\Gamma(q) = \frac{\partial h}{\partial q}$  invertível para  $q$  pertencente a um aberto  $W$  (onde não existem singularidades da cinemática direta). Neste caso, pela regra da cadeia

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial q} \Big|_{q(t)} q^{(1)} = \Gamma(q)Q^{(1)}$$

E portanto vemos que a primeira derivada de todas as saídas é função apenas do estado  $x$ . Seja  $\Gamma = \frac{\partial h}{\partial q}$ . Derivando outra vez

$$y^{(2)} = \Gamma^{(1)}q^{(1)} + \Gamma q^{(2)}$$

Note que a componente  $ij$  da matriz  $\Gamma$  é dada por

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial q_j}$$

portanto a componente  $ij$  de  $\Gamma^{(1)}$  será

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left\{ \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \right\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k$$

portanto a  $i$ -ésima componente  $\{\Gamma^{(1)}q^{(1)}\}_i$  do vetor coluna  $\Gamma^{(1)}q^{(1)}$  será

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

Logo se  $H_i$  é a matriz Hessiana da aplicação  $h_i$ , definida elemento a elemento, por

$$\{H_i\}_{kj} = \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_j},$$

e teremos portanto

$$\{\Gamma^{(1)}q^{(1)}\}_i = \sum_{i=1}^n \{q^{(1)}\}^T H_i \{q^{(1)}\}$$

Como  $H_i$  depende apenas de  $q$ , segue-se que

$$y^{(2)} = a(x) + A(x)u(t)$$

onde

$$a(x) = \Gamma^{(1)}q^{(1)} - \Gamma M^{-1}[C + K]$$

e

$$A(x) = \Gamma M^{-1}$$

Como  $\det A = (\det \Gamma)(\det M^{-1}) \neq 0$ , concluímos que

- O grau relativo  $\rho_i$  de todas as saídas é 2. Portanto o sistema possui grau relativo bem definido.
- A matriz de desacoplamento é invertível em  $W \times \mathbb{R}^n$  (o espaço de estados é  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ).
- A dinâmica zero está ausente, pois  $s = 2n - \sum_{i=1}^n \rho_i = 0$ .

Portanto a lei de controle

$$u = A(x)^{-1}[-a(x) + \bar{y}^{(2)} + v] \quad (27)$$

lineariza a dinâmica do erro de tal forma que, em malha fechada temos

$$e^{(\rho)} = e^{(2)} = v$$

A lei de controle (27) é portanto uma realimentação linearizante para dinâmica do erro. Podemos proceder como na seção 2.3 para construir uma realimentação estabilizante da dinâmica do erro. Seja  $\epsilon_i \in \mathbb{R}^2$  definido por

$$\epsilon_i = (e_i^{(0)}, e_i^{(1)})^T$$

Então é fácil ver que a dinâmica do erro  $e_i$  é governada pela equação linear

$$\dot{\epsilon}_i = A_i \epsilon_i + B_i v_i \quad (28)$$

onde

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim uma lei de controle

$$v_i = F_i \epsilon_i$$

análoga à da seção 2.3, pode estabilizar a dinâmica do erro. Para isso basta escolher os dois pólos de malha fechada, tomando  $\pi_i(s) = (s - \lambda_i^1)(s - \lambda_i^2) = s^2 - (a_1^i s + a_0^i)$ . Para isso, podemos escolher

$$F_i = [a_0^i, a_1^i], \quad i = 1, \dots, n$$

Em particular, a lei de controle estabilizante possui a forma:

$$v = F \epsilon$$

onde

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n \end{bmatrix}$$

e

$$\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)^T$$

Note que

$$\epsilon = (e_1^{(0)}, e_1^{(1)}, e_2^{(0)}, e_2^{(1)}, \dots, e_n^{(0)}, e_n^{(1)})^T = y^{\langle \rho-1 \rangle} - \bar{y}^{\langle \rho-1 \rangle}$$

onde

$$\begin{aligned} y^{\langle \rho-1 \rangle} &= (y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(0)}, y_n^{(1)})^T \\ \bar{y}^{\langle \rho-1 \rangle} &= (\bar{y}_1^{(0)}, \bar{y}_1^{(1)}, \dots, \bar{y}_n^{(0)}, \bar{y}_n^{(1)})^T \end{aligned}$$

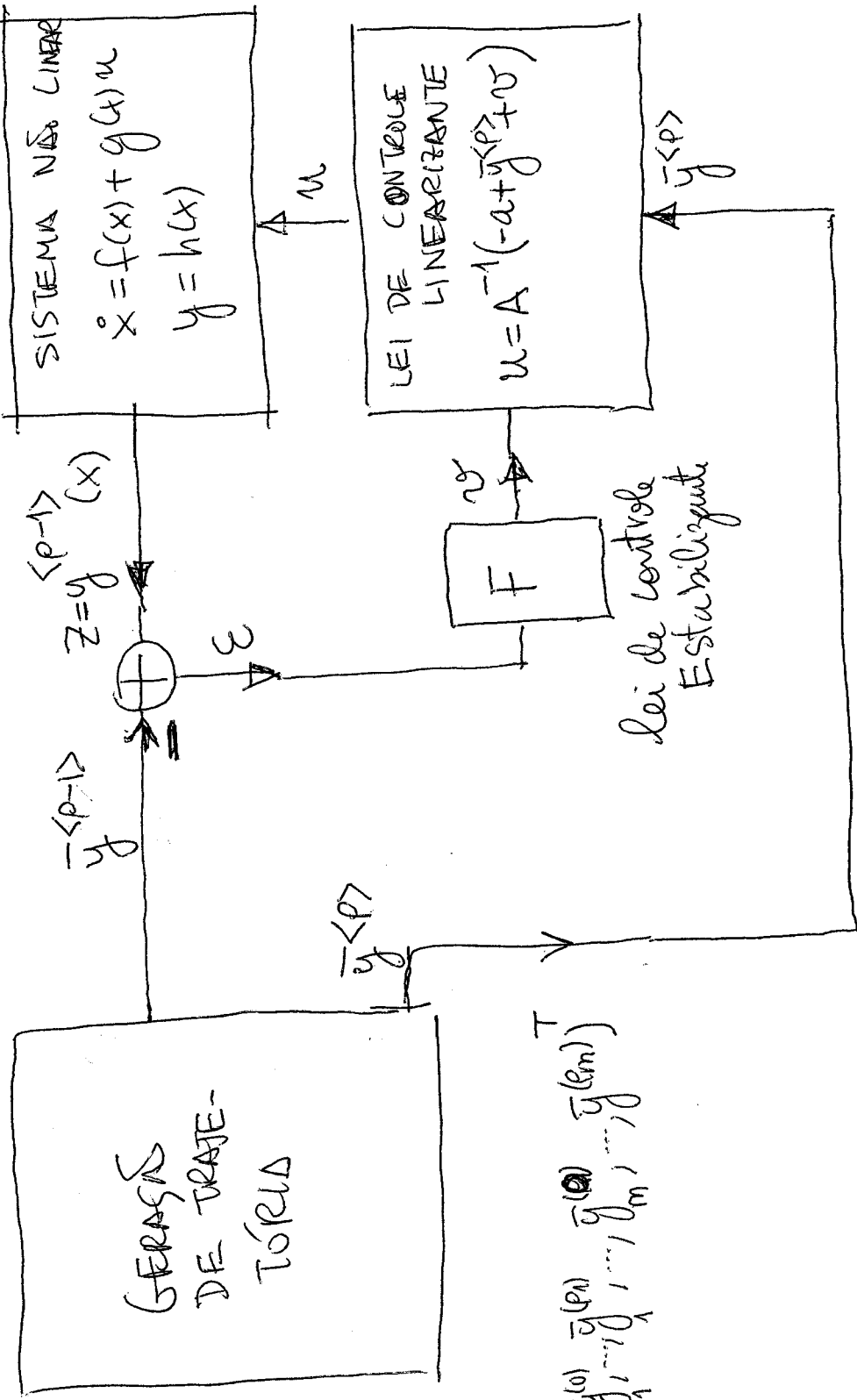


## Referências

- [1] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 44(5):922–937, 1999.
- [2] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1989.
- [3] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 3rd edition, 1995.
- [4] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [5] P. S. Pereira da Silva, H. B. Silveira, C. Correa Filho, and S. Batista. An infinite dimensional differential-geometric approach for nonlinear systems : Part II - system theory. 2008. . submitted, available in [www.lac.usp.br/~paulo/](http://www.lac.usp.br/~paulo/).

$$z = \begin{bmatrix} y^{(p-1)} \\ y^{(p-2)} \\ \dots \\ y^{(1)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{y}^{(p-1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(p-1)} \\ y_1^{(p-2)} \\ \dots \\ y_1^{(1)} \\ y_1^{(0)} \end{bmatrix}^T, \dots, \bar{y}^{(p-m)} = \begin{bmatrix} y_m^{(p-1)} \\ y_m^{(p-2)} \\ \dots \\ y_m^{(1)} \\ y_m^{(0)} \end{bmatrix}^T$$



$$\bar{y}^{(p)} = \begin{bmatrix} y_1^{(p)} \\ y_1^{(p-1)} \\ \dots \\ y_1^{(1)} \\ y_1^{(0)} \end{bmatrix}^T, \dots, \bar{y}^{(p-m)} = \begin{bmatrix} y_m^{(p)} \\ y_m^{(p-1)} \\ \dots \\ y_m^{(1)} \\ y_m^{(0)} \end{bmatrix}^T$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & F_2 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & F_m \end{pmatrix} / \begin{matrix} v = F e \\ v_i = F_i e_i \end{matrix}$$