Cap. 3 — Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais

1 Problema de Cauchy

Esta seção tem como objetivo apresentar o problema de Cauchy (que nada mais é do que uma equação diferencial de primeira ordem) e sua solução analítica. Em geral as equações diferenciais no $\mathbb{R}^n$-não possuem solução analítica, e somente conseguimos explicitar essas soluções em casos particulares. No entanto, métodos numéricos podem quase sempre obter aproximações das soluções num intervalo finito de tempo com erro *arbitrariamente*[1] pequeno, pelo menos se as computações fossem exatas.

Uma teoria que permite obter informações de uma equação diferencial sem resolvê-la é denominada de *teoria qualitativa*. Tais teorias são de certo modo mais importantes do que saber resolver as equações, pois a solução das mesmas acabam sendo obtida pelos métodos numéricos. É importante ressaltar que os métodos numéricos podem fornecer resultados distantes da real solução em alguns casos, De fato os "*experimentos numéricos*" aplicados em equações diferenciais *patológicas* podem dar resultados muito diferentes quando se escolhem métodos numéricos diferentes. Resta ao usuário dos programas de integração numérica saber criticar os resultados à luz do próprio cálculo numérico e ainda através de teorias qualitativas.

A seguir enunciamos o problema de Cauchy unidimensional.

Problema de Cauchy Unidimensional : Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e uma condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}$, em t_0, queremos achar uma solução da equação diferencial:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1}$$
$$x_(t_0) = x_0 \tag{2}$$

$\diamondsuit$

Lembre que uma solução de (1) definida em um intervalo $[t_1, t_2]$ com $t_0 \in [t_1, t_2]$ é uma aplicação $\phi : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\dot{\phi}(t) = f(\phi(t))$ e ainda $\phi(t_0) = x_0$. Normalmente denotamos uma solução $\phi(t)$ por $x(t; t_0, x_0)$, ou simplesmente $x(t)$ quando o contexto permitir. Na maioria dos casos, pelo menos no estudo de sistemas de controle, temos $t_1 = t_0$, isto é, estamos interessados no comportamento futuro das soluções, isto é, o seu valor para $t \geq t_0$.

Definição 1 *Um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ de (1) é um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\bar{x})$ seja nulo.*

Dizemos que o Problema de Cauchy não tem unicidade se existirem pelo menos duas soluções distintas $\phi_1(t) = x_1(t; t_0, x_0)$ e $\phi_2(t) = x_2(t; t_0, x_0)$ definidas pelo menos

[1]Na verdade existe o limite da precisão da representação numérica no computador

em um intervalo comum $[t_a, t_b]$ contendo t_0, sendo que para algum $\tau \in [t_a, t_b]$ temos $\phi_1(\tau) \neq \phi_2(\tau)$ (vide Figura 1).

O exemplo a seguir não possui unicidade no sentido que, para condição inicial $x_0 = 0$ vamos exibir infinitas soluções $x(t)$ para o sistema tais que $x(t_0) = x_0$.

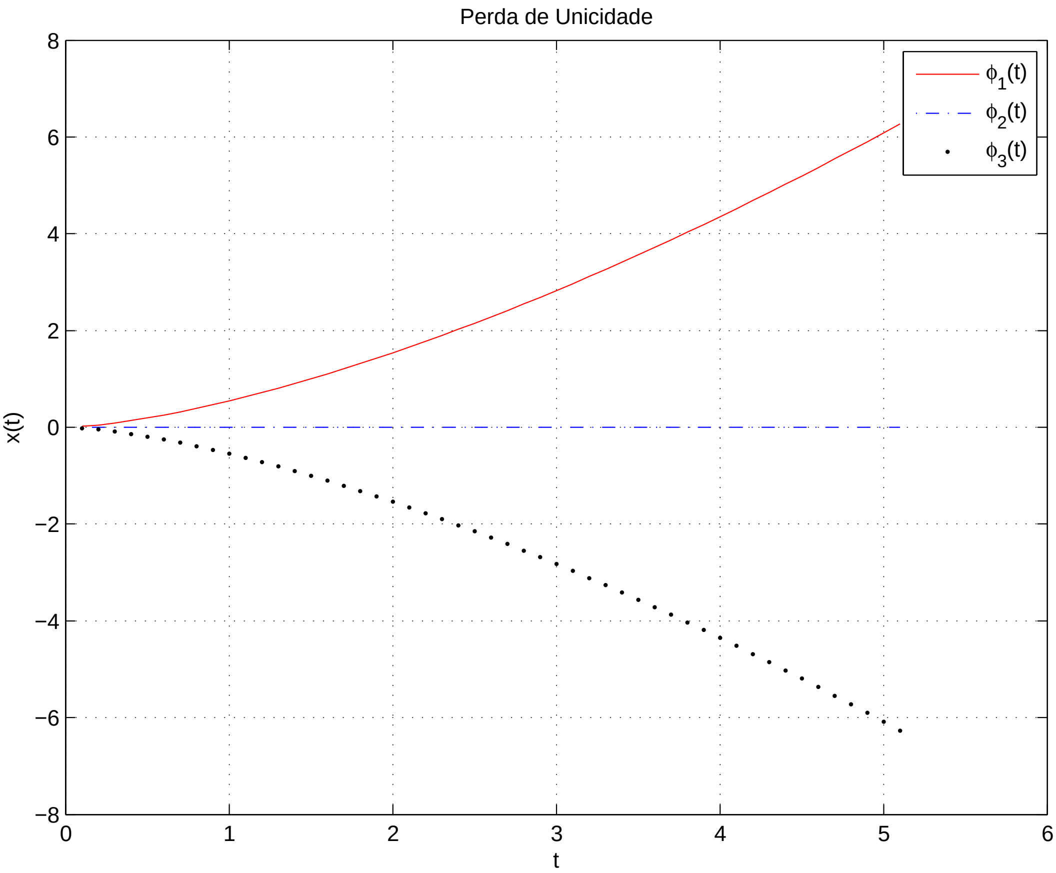

Figura 1: Três soluções da equação $\dot{x} = x^{1/3}$ com condição inicial $x(0) = 0$

Exemplo : Considere o Problema de Cauchy unidimensional:

$$\dot{x}(t) = x(t)^{1/3}, x(t_0) = x_0$$

Vimos no capítulo 1 que para encontrar soluções que não passem em um ponto de equilíbrio, podemos utilizar a expressão:

$$\int_{t_0}^{t} dx/f(x) = \int_{t_0}^{t} dx/x^{1/3} = t - t_0$$

que fornece:

$$[3x(t)^{2/3}/2 - 3/2x_0^{2/3}/2] = t - t_0$$

e portanto

$$x(t) = \{2/3[3/2x_0^{2/3} + t - t_0]\}^{3/2}$$

escolhendo-se $t_0 = 3/2x_0^{3/2}$, obtemos a solução $\phi_1(t) = \boxed{(2t/3)^{3/2}}$. Por derivação, verifica-se que $\dot{\phi}_1(t) = \phi_1(t)^{1/3}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $\phi_1(t)$ é uma solução definida para todo $t \geq 0$. Por outro lado, exibe-se mais outras duas soluções que respeitam a mesma condição $x(0) = 0$. São elas, $\phi_2(t) = -\phi_1(t)$ e $\phi_3(t) = 0$, para todo $t \geq 0$. Portanto não há unicidade de soluções, como mostrado na figura 1. ♣

2 Espaços normados e o lema da contração

Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial X sobre o corpo do números reais $\mathbb{R}$ tal que exista uma aplicação $\|.\| : X \to \mathbb{R}$, denominada de *norma*, tal que

- $\|x\| > 0$, para qualquer $x \in X$, $x \neq 0$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para quaisquer $x, y \in X$.
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in X$.

Exemplo : O conjunto $C^0[a, b]$ das aplicações $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é um espaço normado com as operações usuais de soma de funções e multiplicação de escalar por função:

- $(\phi_1 + \phi_2)(t) \doteq \phi_1(t) + \phi_2(t)$, quaisquer $\phi_1, \phi_2 \in C^0[a, b]$.
- $(c\phi)(t) \doteq c\phi(t)$, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$ e $\phi \in C^0[a, b]$. Definindo-se a *norma do sup* por:

$$\|\phi\| \doteq \sup_{t\in[a,b]} \{\|\phi(t)\| : t \in [a, b]\}$$

♣

Uma vez que definimos uma norma no espaço X, temos automaticamente uma topologia associada a essa norma através da seguinte construção:

- Uma bola aberta $B_\delta(\phi)$ de centro em ϕ e raio δ é o subconjunto de $C^0[a, b]$ definido por:

$$B_\delta(\phi) = \{\psi \in C^0[a, b] \mid \|\psi - \phi\| < \delta\}$$

- Um subconjunto aberto de $C^0[a, b]$ é uma união arbitrária de bolas abertas.
- Um subconjunto fechado S é o complementar de um subconjunto aberto

Definição 2 *(Convergência de sequências) Uma sequência x_n de elementos de um espaço normado X converge para $\bar{x}$ (**consideramos sempre que** $x \in X$), se para todo $\epsilon > 0$ real, existir N natural suficientemente grande tal que $n > N$ implicar em $\|x_n - \bar{x}\| < \epsilon$.*

Observação: Assim como no caso dos espaços Euclideanos, se S é fechado, então toda seqüência x_n convergente de elementos de S converge para um elemento de S (exercício).

A maneira de imitar a propriedade de completude dos reais no caso de espaços normados é considerar o conceito de seqüências de Cauchy.

Definição 3 *Uma seqüência x_n de elementos de um espaço normado X é* de Cauchy *se para todo $\epsilon > 0$ real existir N natural suficientemente grande tal que $n, m > N$ implica em $\|x_n - x_m\| < \epsilon$. Um espaço normado X é denominado de completo se toda seqüência de Cauchy for convergente. Um subconjunto S (não necessariamente um subespaço) de X é* completo *se toda seqüencia de Cauchy de elementos de S convergir para um elemento de S. Um espaço normado completo é denominado de **Espaço de Banach.***

Observação Importante: Todo subconjunto fechado S de um espaço completo é completo (exercício).

Definição 4 *Sejam $A \subset X$ e $V \subset Y$ dois subconjuntos de espaços normados X, Y. Por comodidade, denotamos a norma de um elemento x de X por $\|x\|$, e também a norma de um elemento y de Y por $\|y\|$, lembrando que esta notação não significa que as duas normas tem a mesma natureza. Dizemos que um operador $T : A \to B$ é contínuo se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $\|x_1 - x_2\| < \delta$ implica em $\|T(x_1) - T(x_2)\| < \epsilon$.*

Observação: Para um operador $T : A \to B$ contínuo, se x_n for uma seqüencia convergente de elementos de A, e A, B são fechados, então $\lim_{n\to\infty} T(x_n)$ existe e é igual $T(\lim_{n\to\infty} x_n)$ (exercício). Em outras palavras, a continuidade permite levar a operação de limite "*de dentro para fora*" do operador T.

Um resultado importante para demonstração de existência e unicidade de soluções do Problema de Cauchy é o Lema da Contração.

Lema 1 *(Lema da Contração) Seja B um espaço de Banach. Seja X um subconjunto fechado de B. Seja $T : X \to X$ um operador. Dizemos que T é uma contração se $\|T(x) - T(y)\| \leq \rho\|x - y\|$ para algum número real ρ, com $0 \leq \rho < 1$. Então existe um único $x^* \in X$, denominado de* ponto fixo de T, *tal que $T(x^*) = x^*$.*

Prova: (Esboço tosco) Escolha qualquer $x_0 \in X$. A idéia da prova é mostrar que a seqüência x_k definida por $x_{k+1} = T(x_k)$ é de Cauchy, sendo portanto convergente. Assim existe o limite x^* da seqüencia, e depois é fácil mostrar que $T(x^*) = x^*$. De fato, a partir da continuidade de T, escreva $x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} T(x_k) = T(\lim_{k\to\infty} x_k) = T(x^*)$. Não é difícil mostrar a unicidade do ponto fixo por absurdo. Para uma prova completa, consulte [1]. $\square$

3 Existência e Unicidade Locais

Esta seção apresenta uma versão do famoso teorema de Picard. Outras versões deste teorema podem ser encontradas em [1, 5]. Agora vamos considerar o problema de Cauchy para sistemas n-dimensionais variantes no tempo. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, denominado **Domínio do Problema de Cauchy** e seja $f : I \times D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. O intervalo I é um intervalo da reta, podendo ser finito, ou infinito, aberto ou fechado, ou ainda da forma $[t_a, t_b)$ ou $(t_a, t_b]$. Seja $x_0 \in D$ e $t_0 \in I$. Considere a equação diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

Definição 5 *Uma **solução local** de (3) (em J) é uma aplicação diferenciável $\phi : J \to D$, definida em um intervalo $J \subset I$, com $t_0 \in J$, tal que $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ para todo $t \in J$ e ainda $\phi(t_0) = x_0$. Uma solução é **global** se $J = I$.*

Problema (Problema de Cauchy n-dimensional) : Encontrar soluções (locais) de (3) para condição inicial $x_0 = x(t_0)$ **fixada**. $\diamondsuit$

Uma hipótese fundamental para demonstrarmos a existência e (principalmente) a unicidade de soluções do *Problema de Cauchy n-dimensional* é o fato de f ser **Lipschitz** com relação à segunda variável.

Definição 6 *Seja $f : I \times D \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, sendo D um aberto de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que f é localmente **Lipschitz** em x_0 com relação à segunda variável (ou simplesmente, "localmente **(L)** em x_0", se existir números reais $L > 0$ e $r > 0$ tais que, para todo $x_1, x_2 \in \bar{B}_r(x_0) \subset D$ e todo $t \in I$ tenhamos*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|. \tag{4}$$

*Dizemos que f é "localmente **(L)**", se f for localmente **(L)** para todo $x_0 \in D$. Dizemos que f é "globalmente **(L)**", se (4) valer para todo $x_0 \in D$.*

OBS: Lembre que $\bar{B}_r(x_0)$ é a bola fechada de raio r, isto é, $\bar{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$.

A partir de agora consideraremos que o intervalo da reta I onde buscamos as soluções é da forma $I = [t_0, T]$ para T finito, ou ainda da forma $I = [t_0, \infty)$. Cometeremos um abuso de notação considerando que T pode ser infinito, e neste caso $[t_0, T]$ denotará $[t_0, \infty]$. Consideramos intervalos desta forma (isto é, intervalos tais que t_0 é seu extremo inferior) pelo fato de que estamos preocupados com aplicações em teoria de controle, onde somente estaremos interessados no futuro das soluções, isto é, em $t \geq t_0$.

Teorema 1 *(Teorema de Picard) Seja $I = [t_0, T]$. Considere o problema de Cauchy n-dimensional, e suponha que f é localmente **(L)**. Então pode-se escolher δ suficientemente* *pequeno tal que exista uma única solução local*[2] *do problema de Cauchy em* $J = [t_0, t_0+\delta]$. *Mais ainda, se uma solução está definida em* $J_1 = [t_0, t_f] \subset I$ *então ela é única neste intervalo.*

Observação: Escolha qualquer t_1 finito, com $t_0 < t_1 < T$ (quando T é finito podemos escolher $t_1 = T$). Seja $h = \max_{t\in[t_0,t_1]} \|f(t, x_0)\|$. Seja r o raio da bola correspondendo à Definição 4 em torno de x_0. A prova do Teorema de Picard mostrará que δ pode ser escolhido como qualquer real positivo tal que $\delta < r/(Lr + h)$ e ainda $\delta \leq (t_1 - t_0)$.

Prova: (Esboço) Seja $J = [t_0, t_0 + \delta] \subset I$ onde $\delta > 0$ é um número real **a determinar**.

Assuma que $x(t)$ é uma solução local do problema de Cauchy em J, então pelo teorema fundamental do cálculo, $\dot{x} = f(t, x)$ implica em:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

para todo $t \in J$. Fixado $\delta > 0$ considere o espaço vetorial E das aplicações contínuas $\phi : J \to \mathbb{R}^n$ munidas da *norma do sup*. Denote a norma do sup de $x(\cdot) \in E$ por $\|x(\cdot)\|_E$. Lembre que $\|x(\cdot)\|_E = \sup_{t\in J} \|x(t)\|$.

Exercício: Mostrar que E é um espaço de Banach (espaço normado completo). ♣

Como f é localmente **(L)** existe $\bar{r} \in \mathbb{R}$ positivo, com $\bar{B}_{\bar{r}}(x_0) \subset D$ tal que (4) é satisfeito.

Defina agora o seguinte subconjunto fechado X de E

$$X = \{\phi(\cdot) \in E \mid \|\phi - x_0\|_E \leq r\}$$

Note que $X \subset E$ é a bola fechada (do espaço E) de raio r e centro na função constante $\psi(t) = x_0, t \in J$. Note que toda aplicação $\phi : J \to \mathbb{R}^n$ pertencente a X é tal que $\|\phi(t) - x_0\| \leq r$ para todo $t \in J$ (conseqüência da definição da norma do *sup*).

Definição 7 *Defina o operador* $T : X \to E$, *tal que, para* $x(\cdot) \in X$, *tenhamos* $T(x(\cdot)) = \phi(\cdot)$, *onde* ϕ *é definido por*

$$\phi(t) = T(x(\cdot))|_t = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

para $t \in J$.

Exercício: Mostrar que $T(x(\cdot))$ assim definida é uma aplicação contínua, sendo portanto um elemento de E. ♣

[2] A mesma demonstração pode ser adaptada para mostrarmos que existe uma única solução em $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, para δ suficientemente pequeno no caso em que I contém t_0 em seu interior.

A **idéia da demonstração** é utilizar o Lema da Contração, pois observe que, pelo teorema fundamental do cálculo, $x(\cdot)$ é ponto fixo de T se e somente se $x(\cdot)$ for solução do problema de Cauchy. De fato, $T(x(\cdot)) = x(\cdot)$ se e somente se tivermos

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

para $t \in J$. Derivando a equação acima em ambos os lados, e aplicando o teorema fundamental do cálculo[3], teremos que $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ e portanto $x(t)$ é solução de (3).

Para poder utilizar o teorema do ponto fixo, precisamos mostrar duas coisas:

(A) Existe δ positivo suficientemente pequeno tal que $T(X) \subset X$.

(B) Existe δ positivo suficientemente pequeno tal que T é uma contração.

Mostremos inicialmente (A). Escolha[4] qualquer $t_1 \in J$ com $t_1 > t_0$. Defina $h \max_{t\in[t_0,t_1]} f(t, x_0)$. Tal máximo existe (é finito) porque toda função contínua num compacto admite máximo e mínimo [2, 4, 3]. Então, para todo $t \in [t_0, t_1]$ teremos:

$$\begin{aligned} T(x(\cdot))|_t - x_0 &= \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \\ &= \int_{t_0}^{t} [f(s, x(s)) - f(s, x_0) + f(s, x_0)]ds \end{aligned}$$

Tomando a norma do $\mathbb{R}^n$ em ambos os lados, usando o fato de que para H contínuo temos

$$\| \int_{t_0}^{t} H(s)ds\| \leq \int_{t_0}^{t} \|H(s)\|ds,$$

e ainda usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} \|T(x(\cdot))|_t - x_0\| &= \| \int_{t_0}^{t} [f(s, x(s)) - f(s, x_0) + f(s, x_0)]ds\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|[f(s, x(s)) - f(s, x_0) + f(s, x_0)]ds\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|[f(s, x(s)) - f(s, x_0)]\|ds + \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0)ds\|ds \end{aligned}$$

Usando o fato de que f é localmente Lipchitz, a definição de h, e ainda o fato de $\|x(t) - x_0\| \leq r$ para todo $x(\cdot) \in X$, obtemos para todo $t \leq t_1$:

[3]Note que o teorema fundamental do cálculo juntamente com a continuidade de $x(t)$ e de $f(\cdot, \cdot)$ garante a diferenciabilidade de $\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$ com relação a t.

[4]Se J é um intervalo fechado $[t_0, T]$, pode-se escolher $t_1 = T$.

$$
\begin{aligned}
\|T(x(\cdot))|_t - x_0\| &\leq \int_{t_0}^{t} L\|x(t) - x_0\| + \int_{t_0}^{t} hds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} Lr + \int_{t_0}^{t} hds \\
&\leq Lrt + ht = (Lr + h)t \leq (Lr + h)\delta
\end{aligned}
$$

Escolhendo $\delta < \min\{r/(Lr+h), t_1\}$ teremos $\|T(x(\cdot))|_t - x_0\| < (Lr+h)r/(Lr+h) = r$. Isto prova (A).

Provemos agora que (B) é verdadeiro ($T : X \to X$ é contração para δ suficentemente pequeno). Dados $x(\cdot), y(\cdot)$ contidos em X, então, como f é (globalmente) **(L)** dentro de $\bar{B}_r(x_0)$, teremos:

$$
\begin{aligned}
\|T(x(\cdot)) - T(y(\cdot))\|_E &= \sup_{t\in J} \| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, y(s))ds\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L\|x(s) - y(s)\| \, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_E \, ds \\
&\leq L\delta\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_E
\end{aligned}
$$

Isto mostra que T é uma contração se tomarmos δ tal que $\rho = L\delta$ seja menor do que 1. Note agora que para $\delta < r/(Lr + h)$ teremos $L\delta < Lr/(Lr + h) < 1$. Portanto é suficiente tomarmos $\delta < \min\{r/(Lr + h), (t_1 - t_0)\}$ para garantirmos que (A) e (B) são verdadeiras.

Note que aplicação do Lema da Contração mostra que existe (uma única) solução $x(\cdot)$ da equação diferencial pertencente a X (isto é, soluções que não saem de $B_r(x_0)$). A demonstração que foi apresentada até agora permite obter seguinte resultado parcial:

Resultado 1 (existência e unicidade locais): *Seja r o raio da bola fechada $\bar{B}_r(x_0)$ correspondente à condição de Lipchitz local em torno de x_0. Existe δ suficientemente pequeno tal que, para todo $\epsilon \leq \delta$ existe uma única solução $x : [t_0, t_0 + \epsilon] \to \mathbb{R}^n$ que não sai de $\bar{B}_r(x_0)$.*

Não mostramos ainda a unicidade no caso mais geral, por exemplo se a solução está definida num intervalo que contiver $J = [t_0, t_0 + \delta]$ propriamente, ou se a solução sair de $\bar{B}_r(x_0)$. Mostraremos então o seguinte resultado

Resultado 2 (Unicidade): Seja $J_1 = [t_0, t_f] \subset I$. Assuma que existam duas soluções $x_1 : J_1 \to D$ e $x_2 : J_1 \to D$ do problema de Cauchy (3). Então $x_1(t) = x_2(t)$

para todo $t \in J_1$. Em particular, se existe uma solução do problema de Cauchy em um intervalo, ela é única neste intervalo.

Para mostrar este resultado, assuma que existem duas soluções diferentes $x_1(\cdot)$ e $x_2(\cdot)$ definidas em J_1. O conjunto:

$$S = \{t \in J_1 \mid x_1(t) - x_2(t) \neq 0\}$$

é limitado e não vazio, portanto admite ínfimo $a = \inf S$. Mostremos que $a > t_0$. De fato

- Por continuidade de x_1 e x_2 existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $t \in J_2 = [t_0, t_0 + \epsilon] \subset J_1$ implica em $\|x_1(t) - x_0\| \leq r$ e $\|x_2(t) - x_0\| \leq r$ (exercício).

- Nestas condições, pelo Resultado 1, podemos tomar ϵ suficientemente pequeno tal que que há unicidade no intervalo J_2 para as soluções que não saem de $B_r(x_0)$.

Logo $a \geq t_0 + \epsilon$.

Note agora que o conjunto $F = \{t \in J_1 | x_1(t) - x_2(t) = 0\} \subset \mathbb{R}$ é fechado (exercício), e tem que conter o intervalo aberto $[t_0, a)$. Portanto $a \in \bar{F}$, já que F contém o fecho de $[t_0, a)$. Logo $a \notin S$. Como $a = \inf S$, para todo $\epsilon_1 > 0$ temos que S contém pontos do intervalo $[a, a + \epsilon_1)$. Aplicando o resultado acima para condição inicial $x_0^1 = x_1(a) = x_2(a)$ e $t_0^1 = a$, constrói-se r_1 a partir da condição de Lipschitz local em torno de x_0^1 e conclui-se que as soluções que não saem de $\bar{B}_{r_1}(x_0^1)$ num intervalo de tempo contido em $J_3 = [t_0^1, t_0^1 + \epsilon_1]$ são únicas para todo $\epsilon_1 \leq \delta_1$ para δ_1 suficientemente pequeno. Por continuidade, se ϵ_1 for suficientemente pequeno, $x_2(t)$ e $x_1(t)$ não podem sair de $B_{r_1}(x_0^1)$ para $t \in J_3$. Portanto x_2 e x_1 coincidem no intervalo J_3 para ϵ_1 positivo, convenientemente construído. Isso contraria o fato de S conter pontos de $[a, a + \epsilon_1) = [t_0^1, t_0^1 + \epsilon_1) \subset J_3$ para ϵ_1 arbitrariamente pequeno. $\square$

4 Prolongamentos e Soluções Maximais

Nesta seção mostraremos que toda solução que fica contida em um compacto pode ser *prolongada*. Em outras palavras, para que uma solução do problema de Cauchy seja *maximal*, isto é, não possa ser prolongada, ela "sai" de qualquer compacto contido no domínio D. Concluiremos que, se D for limitado, então toda solução maximal tende à fronteira de D quando t tender para infinito. Seja $D = \mathbb{R}^n$ e seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo finito. Então toda solução maximal $x : [t_0, T) \to D$ "tende para infinito" quando t tender para T.

Um resultado auxiliar importante para a seção é o *Lema da União dos Compactos*[5]

[5] Vide Exercício 7 da primeira lista de exercícios.

Lema 2 *(Lema da União dos Compactos). Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Então existe uma coleção $\{K_j : j \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos compactos K_j tais que:*

$$D = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$$

sendo que, para todo $x \in D$ tal que $x \notin K_j$, pelo menos uma das duas afirmações abaixo sempre ocorre para todo $j > 0$:

(A) $\|x\| > j$, *ou*

(B) $dist(x, \partial D) < 1/j$.

Apresentamos agora o conceito de prolongamento de uma solução[6]

Definição 8 *Sejam J_1 e J_2 dois intervalos da reta real. Uma solução $x_1 : J_1 \to D$ é o* prolongamento *de outra solução $x_2 : J_2 \to D$ se $J_1 \supset J_2$ e as soluções coincidem em J_2. Uma solução que não pode ser prolongada é denominada de solução* maximal.

O lema a seguir mostra as propriedades básicas das soluções com relação à propriedade de prolongamento.

Lema 3 *(Lema da Saída do Compacto) Considere o problema de Cauchy n-dimensional*

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \tag{5}$$

*onde $f : I \times D \to \mathbb{R}^n$ é contínua e localmente **(L)**, onde $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ e $D \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto (Domínio do Problema de Cauchy). Seja K um conjunto compacto contido em D. Suponha que existe uma solução $x : [t_0, T)$, onde $T < t_1$ e $x(t) \in K$ para todo $t \in [t_0, T)$. Então:*

(a) A solução $x(\cdot)$ é uniformemente contínua em $[t_0, T)$.

(b) O limite $x^* = \lim_{t \to T} x(t)$ existe e é pertencente a K.

(c) Defina $x_1 : [0, T] \to D$ tal que $x_1(t) = x(t)$ para $t \in [t_0, T)$ e $x(T) = x^*$. Com esta definição, $x_1(\cdot)$ é solução do problema de Cauchy em $[t_0, T]$.

(d) Existe $\delta > 0$ tal que $x(\cdot)$ admite um prolongamento definido no intervalo $[t_0, T + \delta]$.

(e) Assuma que uma (outra) solução $x^* : [t_0, t^*) \to D$ é maximal. Então, para todo compacto $K \subset D$ existe $\delta > 0$ tal que $t \in (t^* - \delta, t^*)$ implica em $x(t) \notin K$. Em outras palavras, soluções maximais saem de qualquer compacto contido no domínio D.

[6]Neste capítulo consideraremos apenas os prolongamentos à direita (para tempo futuro). As mesmas técnicas permitem estudar prolongamentos à esquerda.

Para demonstração do *Lema da Saída do Compacto*, vide Apêndice.

Como exercício, o aluno pode demonstrar as seguintes conseqüências do teorema da saída do compacto, e do Lema da União dos Compactos.

- Se o domínio $D = \mathbb{R}^n$, se uma solução $\phi : [t_0, T) \to \mathbb{R}^n$ é maximal (não admite prolongamento), então $\lim_{t\to T} \|\phi(t)\| = \infty$. Em outras palavras, toda solução maximal no intervalo $[t_0, T)$ explode em tempo finito T.

- Se o domínio D é limitado (isto é, está contido em alguma bola de raio r) então $\lim_{t\to T} \text{dist}(\phi(t), \partial D) = 0$. Em outras palavras, toda solução maximal no intervalo $[t_0, T)$ tende à fronteira de D quando t tende para T.

- Quando D não é limitado, e também não coincidir com $\mathbb{R}^n$, então a situação é mais complicada. Pode-se afirmar apenas que, para todo $M > 0$, tão grande quanto se queira, existe $\delta > 0$ tal que uma das situações seguintes ocorre para $\|t - T\| \leq \delta$:

  (a) $\text{dist}(\phi(t), \partial D) \leq 1/M$, ou ainda;

  (b) $\|\phi(t)\| > M$.

  Falando grosseiramente, a solução pode tender para infinito nas direções onde D "é ilimitado", enquanto para outras direções onde D "é limitado", a solução pode tender para a fronteira de D.

A Prova do Lema da Saída do compacto

Prova:
(a) O conjunto $F = I \times K = [t_0, t_1] \times K$ é compacto (exercício). Portanto, da continuidade de f em $I \times K \subset I \times D$, segue-se que $\|f(t, x\| \leq M$ em F. Como $\dot{x}(t) = f(t, x(t)), t \in [t_0, T)$, teremos que, para qualquer $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T)$:

$$x(\tau_2) = x(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t, x(t))dt$$

Logo

$$\begin{aligned} \|x(\tau_2) - x(\tau_1)\| &= \|\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t, x(t))dt\| \\ &\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|f(t, x(t))\|dt \\ &\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} M dt \\ &= M(\tau_2 - \tau_1) \end{aligned} \tag{6}$$

Logo $x(t))$ é uniformemente contínua em $[t_0, t]$ (é também globalmente Lipschitz).
(b) Provemos que existe $\lim_{t \to T} x(t)$. Inicialmente tome qualquer seqüencia t_k crescente e convergente para T, com $t_k \in [t_0, T)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $x_k = x(t_k)$ é uma seqüência contida no compacto K, ela admite uma subseqüência convergente $x_{k_i} = x(t_{k_i}), i \in \mathbb{N}$. Seja $x^* = \lim_{i \to \infty} x(t_{k_i})$. Mostremos que $x^* = \lim_{t \to \infty} x(t)$. Escolha $\epsilon > 0$ arbitrário:

- Como $\lim_{i \to \infty} t_{k_i} = T$, temos que existe $K(\epsilon)$ suficientemente grande tal que $i > K(\epsilon)$ implica em
$$|t_{k_i} - T| < \epsilon/(3M) \tag{7}$$
- Como $x^* = \lim_{i \to \infty} x(t_{k_i})$, existe $K_1(\epsilon)$ suficientemente grande tal que, $i > K_1(\epsilon)$ implica em
$$\|x(t_{k_i} - x^*\| < \epsilon/3 \tag{8}$$

Para mostrar que $x^* = \lim_{t \to \infty} x(t)$, seja ϵ arbitrário e tome $\delta(\epsilon) = \epsilon/(3M)$. Mostraremos que a definição de limite é atendida, ou seja, que

$$|t - T| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \epsilon$$

De fato, assuma que
$$|t - T| < \epsilon/(3M)$$
Logo da última inequação, de (7) e da desigualdade triangular, teremos

$$|t - t_{k_i}| = |t - T + T - t_{k_i}| \leq |t - T| + |T - t_{i_k}| = 2\epsilon/(3M)$$

Da última inequação e de (6), segue-se que

$$\|x(t) - x(t_{k_i})\| \leq M|t - t_{k_i}| =< 2\epsilon/3$$

Logo, da última inequação e de (8), segue-se que

$$\begin{aligned}
\|x(t) - x^*\| &= \|x(t) - x(t_{k_i}) + x(t_{k_i}) - x^*\| \\
&\leq \|x(t) - x(t_{k_i})\| + \|x(t_{k_i}) - x^*\| \\
&< 2\epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon
\end{aligned}$$

Por fim, como K é fechado (por ser compacto) e $x_(t_{k_i}) \in K$, segue-se que x^* é o limite de uma seqüência de elementos de K. Assim $x^* \in K$.
(c) Considere a seguinte afirmação (trivial):
Afirmação (A): Sejam $F : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ e $x_1 : F : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ duas aplicações contínuas que coincidem em $[T_0, T)$. Então elas coincidem em $[t_0, T]$.

Seja aplicação $x_1 : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), t \in [t_0, T) \\ x^*, t = T \end{cases}$$

Por construção $x_1(t)$ é contínua[7]. Como f é contínua em $[t_0, T] \times D$ e $x_1(\cdot)$ é contínua em $[t_0, T]$, a aplicação composta $f(\tau, x_1(\tau))$ é contínua. Como a integral de uma aplicação contínua é contínua (pois é diferenciável), a aplicação $F : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_1(\tau)) d\tau$$

será também contínua. Como $x(t)$ é solução em $[t_0, T)$ e coincide com x_1 neste intervalo, pelo teorema fundamental[8] do cálculo aplicado para $t \in [t_0, T)$ teremos:

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_1(\tau)) d\tau, \ t \in [t_0, T)$$

Logo $F(t)$ e x_1 são contínuas em $[t_0, T]$ e coincidem em $[t_0, T)$. Pela afirmação (A) acima, $F(t)$ e x_1 coincidem em $[t_0, T]$. Portanto

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x_1(\tau)) d\tau, \ t \in [t_0, T]$$

Deste modo podemos derivar em ambos os lados da última equação e o teorema fundamental do cálculo nos dará $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ em $[t_0, T]$.
(d) Pelo Teorema de Picard (Teorema 1) considerando-se o instante inicial igual a T e a condição inicial igual a $x(T) = x^*$ conclui-se que podemos prolongar a solução até $t = T + \delta$, para δ suficientemente pequeno.

(e) Assuma que a solução $x^* : [t_0, t^*) \to D$ é maximal e $[t_0, t^*) \subset [t_0, t_1] \subset I$, com t_1 finito. Note que, se $M = K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, $[t_0, t_1] \times K$ é compacto (exercício). Portanto a aplicação contínua $\|f\| : I \times D \to \mathbb{R}$ quando restrita a M admite um máximo h^* tal que $\|f(t, x)\| \leq h^*$ para todo $(t, x) \in M$.

Por absurdo, suponha que para todo $\delta > 0$ existe $t \in (t^* - \delta, t^*) \subset [t_0, t^*)$ tal que $x(t) \in K$.

Seja δ_n uma seqüência de números reais positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ e $(t^* - \delta_n, t^*) \subset [t_0, t^*)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $t_n \in (t^* - \delta_n, t^*)$ tal que $x(t_n) \in K$. Como toda seqüência contida em um compacto K admite uma subseqüência convergente, seja $z_i = x(t_{n_i})$ uma subseqüência convergente para $z^* \in K$, e seja $\tau_i = t_{n_i}$. Note que, por construção $\lim_{i\to\infty} \tau_i = t^*$ e ainda $\lim_{i\to\infty} x(t_i) = z^*$.

Como f é localmente (L) em torno de z^*, existe $s > 0$ tal que para todos $x, y \in \bar{B}_s(z^*)$ e $t \in I$ temos

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

Seja $r = s/2$ e $\delta = \min\{r/(Lr + h^*), (t_1 - t_0)\}$. Como $\lim_{i\to\infty} \tau_i = t^*$ e $\lim_{i\to\infty} x(\tau_i) = z^*$, existe N suficientemente grande tal que $i > N$ implica em

[7] Lembre que uma aplicação $g(z)$ é contínua em $z = h$ se e somente se $\lim_{z\to h} = g(h)$.

[8] Aqui usamos somente o fato de que $x(\cdot)$ é solução em $[t_0, T)$. A sutileza da prova está em mostrar que podemos aplicar o teorema fundamental do cálculo para $t = T$. Lembre que o teorema fundamental do cálculo pede a continuidade do integrando!

- $\|x(\tau_i) - z^*\| < r$,
- $\|\tau_i - t^*\| < \delta/2$.

Portanto tomando $i = N+1$, o tempo $t_0^1 = \tau_i$ e a condição inicial $x_0^1 = x(\tau_i) \in K$ segue-se que a aplicação do Teorema de Picard (vide a observação logo abaixo do teorema) nos fornece a existência de uma solução $x_1 : [t_0^1, t_0^1 + \delta] \to \mathbb{R}^n$. Note agora que

$$\|t_0^1 - t^*\| < \delta/2$$

e assim $t_0^1 + \delta > t^*$. Com isso conseguimos prolongar a solução além do instante t^*, contradizendo o fato de que a solução $x(t)$ é maximal. Isto conclui a demonstração.

$\square$

Referências

[1] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems.* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, second edition, 1996.

[2] Elon Lages Lima. *Curso de Análise.* IMPA – Projeto Euclides, Rio de janeiro, 1976.

[3] Elon Lages Lima. *Curso de Análise, vol. 2.* IMPA – Projeto Euclides, Rio de janeiro, 1981.

[4] Elon Lages Lima. *Análise Real, vol. 2.* IMPA, Rio de janeiro, 2004.

[5] Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Projeto Euclides, IMPA, Brasil, 1979.