Referências

[1] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Adaptive Control.* Addison-Wesley, 1989.

[2] G. C. Goodwin and K. S. Sin. *Adaptive Filtering, Prediction and Control.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984.

[3] Liu Hsu, Aldayr Dantas de Araújo, and Ramon Romankevicius Costa. Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control. IEEE *Trans. Automatic Control*, 39(1):4–21, January 1994.

[4] Achim Ilchman. *Non-identifier-based High-Gain Adaptive Control*, volume 189 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Springer Verlag, Berlin, 1993.

[5] P. A. Ioannou and J. Sun. *Stable and Robust Adaptive Control.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995.

[6] Miroslav Krstić, Ioannis Kanellakopoulos, and Petar Kokotović. *Nonlinear and Adaptive Control Design.* John Wiley, New York, 1995.

[7] ID Landau, R Lozano, and M M'Saad. *Adaptive Control.* Springer Verlag, London, 1998.

[8] Iven Mareels and Jan Willem Polderman. *Adaptive Systems: An Introduction.* Birkhäuser, Boston, 1996.

[9] A Stephen Morse. Towards a unified theory of parameter adaptive control – Part 2: Certainty equivalence and implicit tuning. IEEE *Trans. Automatic Control*, 37(1):15–29, January 1992.

[10] A Stephen Morse. Supervisory control of families of linear set-point controllers – Part 1: Exact matching. IEEE *Trans. Automatic Control*, 41(10):1413–1431, October 1996.

[11] A Stephen Morse. Supervisory control of families of linear set-point controllers – Part 2: Robustness. IEEE *Trans. Automatic Control*, 42(11):1500–1515, November 1997.

[12] A Stephen Morse and Felipe M Pait. MIMO design models and internal regulators for cyclically-switched parameter-adaptive control systems. IEEE *Trans. Automatic Control*, 39(9):1809–1818, September 1994.

[13] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1989.

[14] K. S. Narendra and Jeyendran Balakrishnan. Adaptive control using multiple models. IEEE *Trans. Automatic Control*, 42(2):171–187, February 1997.

[15] Felipe M Pait. *On the Design of Direct Adaptive Controllers.* In preparation.

[16] Felipe M Pait. *A Tuner that Accelerates Parameters. Systems & Control Letters*, June 1998. To appear.

[17] Felipe M Pait. Tuning via measurements of the squared error. In *Fourth* SIAM *Conference on Control and its Applications*, page 34, Jacksonville, Florida, 1998.

[18] Felipe M Pait and Paulo A Atkinson. A tuner that accelerates parameters. In *American Control Conference*, Philadelphia, June 1998.

[19] Felipe M Pait and Fuad Kassab Jr. Algoritmos paralelos para controle adaptativo: Projeto de pesquisa. In 10º *Congresso Brasileiro de Automática*, pages 677–682, Rio de Janeiro, Brazil, Setembro 1994. (In Portuguese).

[20] Felipe M Pait and Fuad Kassab Jr. Parallel algorithms for adaptive control: Robust stability. In A Stephen Morse, editor, *Control Using Logic-Based Switching.* Springer Verlag, 1996.

[21] Felipe M Pait and A Stephen Morse. A cyclic switching strategy for parameter adaptive control. IEEE *Trans. Automatic Control*, 39(6):1172–1183, June 1994.

[22] W J Rugh. *Linear System Theory.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, second edition, 1996.

[23] Shankar Sastry and Marc Bodson. *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1989.

8. Lista dos Trabalhos Anexos

Segue a lista dos trabalhos que anexamos a este texto sistematizado, indicando entre parênteses a seção em que cada trabalho é mencionado.

1. Versão expandida de [16], também [18] (seção 4).
2. Versão expandida de [20] (seção 6).
3. Versão preliminar de [15] (seção 7).
4. Versão expandida de [17] (seção 7).
5. Separata de [21] (seção 5).
6. Separata de [12] (seção 5).

7. Sobre o Projeto de Controladores Adaptativos Diretos

O primeiro passo para a construção de um sistema de controle adaptativo direto é decidir-se por uma metodologia de projeto de controle por realimentação subjacente. Os parâmetros ajustáveis, a forma da equação de erro, o inevitável observador adaptativo, as estruturas de todos estes componentes seguem dessa escolha inicial. Em contraste, controladores adaptativos indiretos tipicamente contém um observador parametrizado (ou identificador) que gera um erro de identificação; um regulador de equivalência à certeza; e um sintonizador (ou lei adaptativa), componentes estes que podem ser projetados de forma modular, mais ou menos independente, contanto que cada um possua certas propriedades que de fato são comuns aos algoritmos típicos de estimação e controle.

A esmagadora maioria da literatura de controle adaptativo usa modelos de referência como paradigma de projeto. Isto porque o erro de controle entre a saída de uma planta e a de um modelo de referência convenientemente definido pode ser expresso de forma que os parâmetros de controle apareçam linearmente — contanto que algumas hipóteses restritivas sejam satisfeitas. Uma outra classe de controladores adaptativos diretos são os controladores adaptativos "universais," não baseados em identificador.

Contudo, modelos de referência são apenas uma entre várias possibilidades em controle adaptativo indireto, e são usados com parcimônia fora da literatura de controle adaptativo. Uma técnica alternativa de projeto é explorada no artigo [15]: o clássico controle ótimo linear-quadrático. O projeto usando um objetivo quadrático talvez seja o paradigma mais transparente e melhor entendido que pode ser aplicado a sistemas dinâmicos estabilizáveis e detectáveis em geral. (Vale notar que a literatura sobre controladores universais com freqüência lança mão de funções de custo quadráticas.) O artigo [15] mostra como construir um controlador parametrizado usando ferramentas familiares da teoria de controle ótimo. O assunto do artigo [17] são sintonizadores apropriados para completar a malha de realimentação adaptativa.

dizer o fato de que a presente baseia-se em conceitos de controle robusto enquanto a direta usa controle ótimo não tem maior significado.

e simultaneamente, estabelecendo um compromisso entre as especificações de controle e a capacidade de processamento do hardware no qual ele é implementado. A relevância de algoritmos paralelos com respeito a esse compromisso foi discutida previamente em [19]. O propósito de [20] é definir quais os requisitos que o controlador parametrizado e o sintonizador (ou "algoritmo supervisório de controle") devem satisfazer para que a estabilidade robusta do sistema adaptativo como um todo seja garantida. Exemplos de algoritmos que satisfazem os requisitos são dados.

A abordagem é similar ao esquema de controle supervisório robusto de uma família de reguladores de set-point proposto por Morse [10, 11] e pode ser descrita como se segue: o conjunto de modelos é dividido em um número finito de subconjuntos para os quais controladores estabilizantes robustos existem. Baseando-se em erros de predição gerados pelos modelos nominais de cada subconjunto, um controlador supervisório escolhe a entrada de realimentação aplicada à planta. Usando algoritmos de sintonia com propriedades descritas no artigo, é possível obter resultados pouco conservadores a respeito da estabilidade robusta do sistema em malha fechada. De fato os raios de incerteza são limitados apenas por nossa abilidade de sintetizar um controlador robusto de equivalência à certeza, assim respondendo a uma questão deixada em aberto por Morse nas contribuições citadas. A idéia de chavear entre vários modelos para melhorar o desempenho transitório de um sistema adaptativo foi explorada também por Balakrishnan e Narendra [14]. Os esquemas paralelos desenvolvidos tem uma dívida com a literatura de controle adaptativo a modelos múltiplos, que se ocupa primariamente da convergência estocástica. Em contraste, o interesse principal de [20] é a estabilidade determinística robusta.

Continuando a comparação de [20] com outras abordagens, na literatura de controle adaptativo robusto é usual introduzir modificações nos algoritmos de sintonia de forma a preservar a estabilidade na presença de dinâmicas não-modeladas suficientemente pequenas [5]. Já o artigo [20] aborda o problema especificando desde o início que o sintonizador e os controladores de equivalência à certeza tenham propriedades propícias à estabilidade adaptativa robusta, tornando-se assim capaz de obter resultados muito menos conservadores. Um caminho diferente para a robustez, combinando conceitos de controle com estrutura variável com controle adaptativo com modelo de referência, é apresentado em [3]. O tipo de chaveamento lá discutido envolve modos deslizantes e difere bastante do presente.

Vale a pena ressaltar que o uso de algoritmos supervisórios se baseia na possibilidade de avaliar simultaneamente o desempenho potencial de vários candidatos a controladores, sem a necessidade de conectar cada um deles ao processo em malha fechada. Isso torna essa abordagem intrinsecamente *indireta* (vide Cap. 2), em contraste com a abordagem direta do Cap. 7. Ambas baseiam-se na otimização de funções-custo, mas até onde podemos

6. Estabilidade Robusta de Algoritmos Paralelos para Controle Adaptativo

A estabilidade de esquemas adaptativos para plantas lineares invariantes no tempo é o assunto de uma vasta literatura. Como pode ser visto nos demais capítulos desta monografia e em suas referências, já está razoavelmente bem entendido como trazer as ferramentas da análise de estabilidade de sistemas lineares para o contexto adaptativo, de forma que, combinando idéias da teoria da estimação de parâmetros com as de síntese de controle linear, podemos projetar sistemas adaptativos estáveis. A pesquisa em controle adaptativo de plantas lineares busca agora respostas para as igualmente importantes questões de robustez e desempenho.

A questão da robustez vem da natureza inerentemente pouco acurada de quaisquer modelos de plantas, que torna impossível dar conta de toda a gama de comportamentos de um processo quando uma malha de controle é fechada. A teoria de controle robusto provê técnicas para lidar com tais incertezas contanto que elas sejam “pequenas,” mas para incertezas maiores é geralmente aconselhável utilizar alguma forma de adaptação para fechar a malha de controle. Temos em mente, por exemplo, o tipo de incerteza que resulta de falhas no processo, tais como mudanças súbitas da dinâmica ou defeitos em sensores ou atuadores. O controle adaptativo tradicional é uma idéia a considerar nestes caso. A dificuldade reside em que o desempenho transitório de um sistema adaptativo é freqüentemente fraco quando a incerteza paramétrica é alta ou quando o uso de sinais de prova não é desejável. É portanto útil considerar o que acontece quando abandonamos o paradigma de adaptação suave que prevalece na literatura de controle adaptativo e tentamos empregar esquemas de chaveamento lógico para a adaptação. Outros empregos de lógica de chaveamento em controle adaptativo são discutidos no Capítulo 5.

O artigo [20] descreve uma classe de algoritmos paralelos para controle adaptativo de sistemas lineares siso. Assume-se que as plantas consideradas pertençam a uma entre um número finito de classes de modelos de processo admissíveis, e que cada classe seja robustamente estabilizável por meio de algum controlador linear invariante no tempo. O controle é escolhido em tempo real por um sintonizador ou supervisor, de acordo com observações de “erros de identificação” adequadamente definidos. O método preserva as propriedades de robustez do projeto de controle linear dentro do contexto adaptativo. Espera-se que algoritmos paralelos do tipo discutido possam servir de ferramenta útil para explorar o compromisso entre desempenho de um sistema adaptativo e o poder computacional do hardware no qual ele é implementado. Outra motivação é controle tolerante a falhas.

A idéia principal por detrás do uso de algoritmos paralelos é dividir a tarefa de computar um controle por realimentação em um número (possivelmente grande) de subtarefas, que podem ser desempenhadas independente ciclicamente para modelos de processo com uma entrada e uma saída, no caso multivariável duas questões ficaram em aberto. A primeira é a construção de um modelo de projeto parametrizado cuja função de transferência seja capaz de "cobrir" a classe de funções de transferência de uma dada família de processos. A segunda é explicar como construir uma família finita $\mathcal{F}$ de controladores com a propriedade de que, para cada processo admissível e cada vetor do espaço de parâmetros, caso a função matricial de transferência do modelo de projeto não se iguale à da planta existe ao menos um controlador de $\mathcal{F}$ que dá a um crucial subsistema a propriedade de observabilidade. Essas duas questões são tratadas no artigo [12].

5. Controle por Equivalência à Certeza: Uma Estratégia de Chaveamento Cíclico

Avanços recentes na teoria de sistemas mostram que há muito a ganhar utilizando estratégias de chaveamento baseadas em lógica, em conjunto com técnicas mais familiares na síntese de controles por realimentação. Isso ficou bastante claro em controle adaptativo, onde a exploração de diversas lógicas possibilitou o desenvolvimento de algoritmos — os chamados "controladores universais" — cujas capacidades servem para delinear o potencial teórico de sistemas de controle adaptativo. Simultaneamente apareceram outras técnicas, possivelmente mais eficientes — tais como o chaveamento com histerese — cuja descoberta expandiu em muito a classe de processos admissíveis que podem ser controlados por métodos adaptativos.

O artigo [21] introduz uma nova técnicas, denominada "chaveamento cíclico," para lidar com o conhecido problema que ocorre na síntese de controladores por equivalência à certeza devido à existência de um subconjunto $\mathcal{V}$ do espaço de parâmetros para os quais o modelo de projeto perde estabilizabilidade. Ao contrário da maioria das técnicas sugeridas previamente para lidar com este problema, a proposta em [21] pode ser empregada com ou sem excitação do processo. Em particular, para que a técnica funcione não é necessário um mecanismo que force os parâmetros sintonizados para fora de $\mathcal{V}$. O vetor de parâmetros sintonizados pode até manter-se dentro de $\mathcal{V}$ indefinidamente sem causar comportamento indesejado do sistema em malha fechada! O chaveamento cíclico pode ser usado de forma modular, isto é, independentemente de quais métodos de ajuste de parâmetros e de qual técnica de projeto de controlador de equivalência à certeza forem empregados.

O ponto de vista tomado no artigo é que o chaveamento cíclico é apenas um entre muitos conceitos sobre os quais o projeto de um sistema de controle adaptativo completo se baseia. O conceito é desenvolvido da maneira mais geral possível, sem prender-se a alguma estrutura particular de identificador ou sintonizador, ou a alguma técnica de projeto de controle por realimentação. Por exemplo, o identificador pode ser do tipo direto ou indireto; o sintonizador pode ser tipo gradiente ou de mínimos quadrados; e a síntese da realimentação pode ser por alocação de pólos, linear-quadrática, ou outra. Os conceitos são exemplificados através de um modelo de projeto siso, n-dimensional, parametrizado linearmente, de controle indireto. Apesar das dificuldades a que o estudo de um sistema dependente não uniformemente dos parâmetros poderia levar, o método proposto para analisar a estabilidade em malha fechada de um sistema adaptativo usando chaveamento cíclico é bastante simples, semelhante ao argumento de injeção de saída utilizado já no Capítulo 2.

Embora o procedimento apresentado em [21] seja suficientemente explícito para permitir a construção de controladores adaptativos chaveados quando o erro é dado pela equação

$$e_I = (\hat{p} - p^*)^\top x + w,$$

onde w é um "ruído" limitado, mas de outra forma desconhecido. O que acontece se $w \in \mathcal{L}^2[0, \infty)$?

17. Idem ao problema anterior, usando o algoritmo de mínimos quadrados.

O algoritmo de aceleração. Os sintonizadores clássicos são tais que a *velocidade* de adaptação a primeira derivada dos parâmetros) é proporcional ao regressor e ao erro de identificação $x^\top \hat{p} - y = x^\top \tilde{p}$. Poderíamos também escolher a *aceleração* dos parâmetros:

$$\boxed{\ddot{\hat{p}} = -xx^\top \tilde{p} - 2(I + xx^\top)\dot{\hat{p}}.} \tag{16}$$

Note que a formula acima é implementável, usando $2n$ integradores, porque a incógnita $\tilde{p}$ aparece apenas em produto escalar com x. Vamos escolher uma nova função de inspiração lyapunoviana:

$$\begin{aligned} V &= \tilde{p}^\top \tilde{p} + \tilde{p}^\top \dot{\hat{p}} + \dot{\hat{p}}^\top \dot{\hat{p}} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{p} & \dot{\hat{p}} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & I/2 \\ I/2 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \dot{\hat{p}} \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

Tomando derivadas e usando o sintonizador por aceleração (16) resulta em

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\tilde{p}^\top \dot{\hat{p}} + \dot{\hat{p}}^\top \dot{\hat{p}} - (\tilde{p}^\top + 2\dot{\hat{p}}^\top)(2\dot{\hat{p}} + xx^\top \tilde{p} + 2xx^\top \dot{\hat{p}}) \\ &= -3\dot{\hat{p}}^\top \dot{\hat{p}} - (\tilde{p} + 2\dot{\hat{p}})^\top xx^\top (\tilde{p} + 2\dot{\hat{p}}) \leq 0. \end{aligned}$$

Integrando $\dot{V}$ obtemos

$$V(t) = V(0) - \int_0^\top \dot{\hat{p}}^\top \dot{\hat{p}} - \int_0^\top \Big(x^\top (\tilde{p} + 2\dot{\hat{p}}) \Big)^2,$$

que leva imediatamente às propriedades desejadas:

$$\tilde{p}, \dot{\hat{p}} \in \mathcal{L}^\infty; \dot{\hat{p}} \in \mathcal{L}^2; x^\top (\tilde{p} + 2\dot{\hat{p}}) \in \mathcal{L}^2.$$

A propriedade de variação lenta $\dot{\hat{p}} \in \mathcal{L}^2$ segue sem a necessidade de normalização, e agora $x^\top(\tilde{p} + 2\dot{\hat{p}}) \in \mathcal{L}^2$ em vez de $x^\top \tilde{p} \in \mathcal{L}^2$ como no sintonizador tipo gradiente. Poderíamos considerar $x^\top(\tilde{p} + 2\dot{\hat{p}})$ um erro modificado. Uma generalização de (16) é

$$\ddot{\hat{p}} = -M_1 \Big(xx^\top \tilde{p} - 2(M_2 + xx^\top M_1 M_3)\dot{\hat{p}} \Big), \tag{16'}$$

com M_1, M_2 e M_3 matrizes $n \times n$ constantes e positivas-definidas tais que $M_2^{-1} < 4M_1 M_3 M_1$ e $M_2 M_1 M_3 + M_3 M_1 M_2 > M_1^{-1}/2$. As propriedades deste sintonizador podem ser obtidas usando a função positiva-definida

$$V = \begin{bmatrix} \tilde{p} & \dot{\hat{p}} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} M_2 & M_1^{-1}/2 \\ M_1^{-1}/2 & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \dot{\hat{p}} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Maiores detalhes podem ser encontrados nos artigos [18] e [16].

Problemas.

16. Analise as propriedades do algoritmo de estimação

$$\dot{\hat{p}} = -\frac{1}{1 + x^\top x} x e_I.$$

numérica em resolver (14), pode ser mais conveniente utilizar uma forma recursiva do algoritmo de mínimos quadrados. Para isso escolhemos uma matriz definida-positiva, portanto invertível, $M(0)$, e definimos

$$\dot{M}(t) = -M(t)xx^\top M(t).$$

Para mostrar que a inversa de $M(t)$ existe e é igual a $\bar{M} = M^{-1}(0)+\int_0^\top xx^\top$, derivamos

$$\frac{d}{dt}\big(M\bar{M} - I\big) = Mxx^\top - Mxx^\top M\bar{M} = -Mxx^\top \left(M\bar{M} - I\right)$$

e portanto $M\bar{M}$ permanece identicamente nulo e $M^{-1}(t) = \bar{M}(t)$. Derivando a equação

$$\left(M^{-1}(0) + \int_0^\top xx^\top\right)\hat{p} = \int_0^\top xy, \tag{13'}$$

que é uma versão de (13) que sempre admite uma solução única, obtemos

$$xx^\top\hat{p} + M^{-1}(t)\dot{\hat{p}} = xy,$$

do onde segue:

$$\dot{\hat{p}} = -Mx(x^\top\hat{p} - y).$$

Em resumo, o algoritmo recursivo de mínimos quadrados é

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\hat{p}} &= -Mx\tilde{y} \\ \dot{M}(t) &= -M(t)xx^\top M(t). \end{aligned}} \tag{15}$$

Para analisar as propriedades de (15), primeiramente vejamos que

$$M(t) = M(0) - \int_0^\top Mxx^\top M,$$

logo $M \in \mathcal{L}^\infty$ e $Mx \in \mathcal{L}^2$. A função não-negativa

$$V = \frac{1}{2}\tilde{p}^\top M^{-1}(t)\tilde{p}$$

tem derivada em relação ao tempo

$$\begin{aligned} \dot{V} =& \tilde{p}^\top M^{-1}\dot{\hat{p}} + \frac{1}{2}\tilde{p}^\top \frac{d}{dt}\big(M^{-1}\big)\tilde{p} \\ =& -\tilde{p}^\top M^{-1}Mxx^\top\tilde{p} + \frac{1}{2}\tilde{p}^\top xx^\top\tilde{p} = -\frac{1}{2}\tilde{y}^2, \end{aligned}$$

portanto

$$\frac{1}{2}\tilde{p}^\top M^{-1}(t)\tilde{p} = V(0) - \frac{1}{2}\int_0^\top \tilde{y}^2.$$

Conclui-se que V é limitada no tempo, logo $\tilde{p} \in \mathcal{L}^\infty$, e também que $\tilde{y} \in \mathcal{L}^2$. Adicionalmente, como Mx bem como $\tilde{y} \in \mathcal{L}^2$, a desigualdade de Schwartz garante que $\dot{\hat{p}} \in \mathcal{L}^1$.

Como $V \geq 0$, isso mostra que a energia do sinal $\tilde{y}z$ é limitada pela de w mais uma constante finita; em particular se $w \in \mathcal{L}^2$ então $\tilde{y} \in \mathcal{L}^2$ também, e $\hat{p}$ é limitado.

Sintonizadores normalizados. Muitas vezes $\dot{\hat{p}} \in \mathcal{L}^2$ ou algo assemelhado é uma propriedade desejável adicional. Para obtê-la podemos empregar algoritmos normalizados, embora o mérito relativo de sintonizadores normalizados contra os não-normalizados continue controverso. Definamos o erro normalizado

$$e_T = \frac{\tilde{y}}{1 + x^\top x} = \tilde{y} - x^\top x e_T. \tag{11}$$

Uma forma de algoritmo normalizado é

$$\boxed{\dot{\hat{p}} = -x e_T = -\frac{x\tilde{y}}{1 + x^\top x}.} \tag{12}$$

Temos

$$\dot{V} = -\tilde{y} e_T = -(1 + x^\top x) e_T^2,$$

portanto

$$V(t) = V(0) - \int_0^\top e_T^2 - \int_0^\top |x e_T|^2,$$

de onde se conclui que $\tilde{p} \in \mathcal{L}^\infty$, que o erro normalizado $e_T \in \mathcal{L}^2$, e também que a velocidade de sintonia dos parâmetros $\dot{\hat{p}} = -x e_T \in \mathcal{L}^2$.

O método dos mínimos quadrados. No lugar de utilizar métodos do tipo gradiente, podemos escolher como objetivo a minimização da integral do erro quadrático

$$\int_0^\top \tilde{y}^2 = \int_0^t (x^\top \hat{p} - y)^2.$$

Não é difícil verificar que esta integral será mínima para

$$\frac{\partial}{\partial \hat{p}} \int_0^t \tilde{y}^2 = 2 \int_0^t x(x^\top \hat{p} - y) = 0,$$

ou seja,

$$\left(\int_0^t x x^\top \right) \hat{p} = \int_0^t x y. \tag{13}$$

Quando $\int_0^t x x^\top$ for não-singular, a equação (13) admite uma solução explícita, ou seja, escolhendo

$$\hat{p}(t) = \left(\int_0^t x x^\top \right)^{-1} \int_0^t x y \tag{14}$$

minimizamos a integral do erro quadrático a cada instante t. Quer por não se verificar a condição de não-singularidade, quer devido à dificuldade

4. Princípios de Identificação

Em controle adaptativo e estimação de parâmetros com freqüência é necessário ajustar recursivamente uma estimativa $\hat{p}$ de um vetor p, composto por n parâmetros constantes mas desconhecidos, a partir de medidas de uma quantidade

$$y = x^\top p + w. \tag{8}$$

Aqui $x : [0, \bar{t}) \to \mathbb{R}^n$ é um vetor de dados muitas vezes chamado de regressor, e w é uma perturbação ou sinal de ruído. O objetivo da sintonia é manter o erro de estimação $\tilde{y} = x^\top \hat{p} - y$ e o erro paramétrico $\tilde{p} = \hat{p} - p$ tão pequenos quanto possível.

Sintonizadores tipo gradiente. Existem muitos métodos populares para lidar com o problema descrito. Talvez o mais imediato envolva minimizar o erro via algoritmos do tipo gradiente:

$$\boxed{\dot{\hat{p}} = -x\tilde{y}.} \tag{9}$$

Supondo inicialmente $w(t) \equiv 0$, juntas as equações diferenciais (8) e (9) se tornam

$$\dot{\tilde{p}} = -xx^\top \tilde{p}. \tag{10}$$

A função não-negativa

$$V = \frac{1}{2}\tilde{p}^\top \tilde{p}$$

tem derivada em relação ao tempo

$$\dot{V} = \tilde{p}^\top \dot{\tilde{p}} = -\tilde{p}^\top x x^\top \tilde{p},$$

portanto

$$\int_0^\top \dot{V} = V(t) - V(0) = -\int_0^\top \tilde{y}^2.$$

Inspeção da equação acima revela que V é limitada no tempo, logo $\tilde{p} \in \mathcal{L}^\infty$, e também que o erro $\tilde{y} \in \mathcal{L}^2$ (normas tomadas no intervalo $[0, \bar{t})$ onde todos os sinais estão definidos). Estas são as principais propriedades que um algoritmo necessita para ser um considerado um candidato apropriado para o papel de sintonizador em um sistema de controle adaptativo.

Propriedades análogas resultam quando levamos em consideração o ruído. Neste caso $x^\top \tilde{p} = \tilde{y} + w$ e portanto

$$\dot{V} = -(\tilde{y} + w)\tilde{y}.$$

Usando a desigualdade $|\tilde{y}w| \leq \frac{1}{2}\hat{z}^2 + \frac{1}{2}w^2$ e integrando resulta

$$V(t) \leq V(0) - \frac{1}{2}\int_0^\top \tilde{y}^2 + \frac{1}{2}\int_0^\top w^2.$$

12. Considere o modelo de projeto SISO
$$\begin{aligned}\dot{x}_D &= (A + p_1 c)x_D + p_2 u_D \\ y_D &= c x_D\end{aligned}$$
e a correspondente estrutura de identificador
$$\begin{aligned}\dot{x}_I &= A_I x_I + b_I u + d_I y \\ y_I &= c_I(p_1, p_2) x_I,\end{aligned}$$
onde
$$A_I = \begin{bmatrix} A^\top & 0 \\ 0 & A^\top \end{bmatrix}, \quad b_I = \begin{bmatrix} 0 \\ c^\top \end{bmatrix}, \quad D_I = \begin{bmatrix} c^\top \\ 0 \end{bmatrix},$$
e $c_I = \begin{bmatrix} p_1^\top & p_2^\top \end{bmatrix}$. Verifique a validade das equações
$$\begin{aligned}E_I(p) A_I &= A_D E_I(p) \\ E_I(p) B_I &= p_2 \\ E_I(p) D_I &= p_1 \\ \begin{bmatrix} p_1^\top & p_2^\top \end{bmatrix} &= c E_I(p)\end{aligned}$$
com
$$E_I(p) = \begin{bmatrix} Q(p_1) & Q(p_2) \end{bmatrix}$$
onde $Q(p_i) = N^{-1} R^\top(p_i)$, N e $R(p_i)$ sendo as matrizes de observabilidade e controlabilidade de (c, A) e (A, p_i) respectivamente. Bibliografia: [9, 12, 21].
13. Determine matrizes A_I, b_I, c_I, e d_I tais que um sistema discreto na forma de regressão
$$y(t) = \phi^\top(t)\theta$$
possa ser expresso na forma
$$\begin{aligned}\phi(t+1) &= A_I \phi(t) + b_I u(t) + d_I y(t) \\ y(t) &= c_I \phi(t).\end{aligned}$$
14. Mostrar que qualquer função de transferência estritamente própria de grau n pode ser expressa como $\dfrac{\beta(s)}{1 - \alpha(s)}$, onde$\beta(s)$ e $\alpha(s)$ são funções de transferência estritamente próprias cujos denominadores são ambos iguais a um polinômio $\delta(s)$ de grau n escolhido previamente.
15. Quais conceitos seriam úteis para resolver o problema da construção de um observador assintótico para o sistema
$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)?\end{aligned}$$
Comente a relação entre este problema e o da construção de observadores adaptativos.

O modelo de projeto (4) admite uma realização da forma

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_D &= (A_I + D_I(I - G_I)^{-1}C_I)\bar{x}_D + B_I u_D \\ y_D &= C_I(p)\bar{x}_D \end{aligned} \tag{6}$$

com $E_I(p)\bar{x}_D = x_D$ porque

$$E_I(p)\dot{\bar{x}}_D = (A_D E_I + D_D(I - G_D)^{-1}C_D E_I)\bar{x}_D + B_D u_D,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\Big(E_I(p)\bar{x}_D\Big) = (A_D + D_D(I - G_D)^{-1}C_D)(E_I\bar{x}_D) + Bu_D.$$

Supondo que a função de transferência da planta Σ_P seja idêntica à do modelo de projeto (4) para algum p_*, podemos escrever uma realização alternativa para Σ_P:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A_I\bar{x} + D_I y + B_I u \\ y &= C(p)\bar{x} \end{aligned} \tag{7}$$

com $E_I(p_*)\bar{x} = x$. Desta forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_I - \bar{x}) &= A_I x_I + B_I u + D_I y - A_I\bar{x} - D_i y - B_I u \\ &= A_I(x_I - \bar{x}) \end{aligned}$$

portanto $x_I - \bar{x} = e^{A_I t}(x_I(0) - \bar{x}(0))$. Podemos escrever então

$$\begin{aligned} \hat{x}_D - x &= E_I(\hat{p})x_I - E_I(p_*)\bar{x} \\ &= (E_I(\hat{p}) - E_I(p_*))x_I + E_I(p_*)e^{A_I t}(x_I(0) - \bar{x}(0)) \\ &= \underbrace{(E_I(\hat{p}) - E_I(p_*))x_I}_{\text{forma bilinear}} + \underbrace{e^{A_D t}(\hat{x}_D(0) - x(0))}_{\text{decai exponenciamente}} \end{aligned}$$

A equação acima nada mais é do que a forma de regressão familiar na teoria de identificação, bilinear nos parâmetros e no *regressor*.

Problemas.

8. Discuta a causalidade dos sistemas com funções de transferência s e $\dfrac{s}{1 + \tau s}$.
9. Verifique que, se o sistema (1) for submetido à realimentação $u = F\hat{x}$, onde $\hat{x}$ é o estado do observador assintótico (2), o conjunto de autovalores do sistema em malha fechada resultante é composto pelos autovalores de $A + BF$ mais os autovalores de $A - HC$. Esse fato é conhecido como *Princípio da Separação*.
10. Apresente condições necessárias e suficientes para a existência de solução para a equação polinomial $\alpha(s)X(s) + \beta(s)Y(s) = \gamma(s)$ nas variáveis $X(s)$ e $Y(s)$.
11. Verificar a relação entre os parâmetros p na equação (3) e os coeficientes da função de transferência $\beta/(1 - \alpha)$.

de forma que

$$\tilde{y} = \hat{y} - y = \beta(s)u + \alpha(s)y - \beta(s)u + \alpha(s)y = 0,$$

a menos de um termo exponenciamente descrescente com as constantes de tempo de A_I (correspondentes ao denominador comum de α e β). Essa construção nada tem de restritiva porque qualquer função de transferência estritamente própria pode ser representada como $\beta/(1-\alpha)$, sendo α e β funções de transferência estáveis e estritamente próprias com o mesmo denominador.

Por um lado a dimensão do observador que acabamos de construir é superior àquela do observador convencional; por outro sua dinâmica independe dos parâmetros p. Isso pode ser muito conveniente em identificação e controle adaptativo. De fato, a equação $y = p^\top x_I + w(t)$ (onde $w(t)$ representa termos exponencialmente decrescentes) é a familiar *forma de regressão* na qual sistemas lineares invariantes no tempo são escritos com o intuito de proceder a uma estimação de parâmetros pelo critério de mínimos quadrados ou por outro método assemelhado. Em seguida fazemos uma construção mais geral e rigorosa de observadores apropriados para o uso em controle adaptativo.

Identificadores. Considere o modelo de projeto

$$\begin{aligned} \dot{x}_D &= (A_D + D_D(I - G_D)^{-1}C_D)x_D + B_D u_D \\ y_D &= C_D x_D, \end{aligned} \tag{4}$$

onde (C_D, A_D) é um par qualquer estável, de dimensão n, com n_I saídas; e $B_{D_{n\times n_u}}$, $D_{D_{n\times n_y}}$, e $G_{D_{n_y\times n_y}}$ são matrizes de parâmetros. G_D pode ser tomada triangular inferior, de modo que $I - G_D$ é invertível, e só precisa ser considerada no caso de sistemas com múltiplas saídas. Conforme mostrado em [12], onde esse assunto é discutido em maior detalhe, podemos construir uma matriz $E_I(p)$ e matrizes A_I, B_I, e D_I, com A_I estável, de forma que as equações

$$\begin{aligned} E_I(p)A_I &= A_D E_I(p) \\ E_I(p)B_I &= B_D(p) \\ E_I(p)D_I &= D_D(p), \quad p \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

sejam válidas. Estas matrizes junto com

$$\begin{aligned} G_I(p) &= G_D \\ C_I(p) &= C_D E_I(p), \quad p \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

determinam um identificador de dimensão n_I

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= A_I x_I + B_I u + D_I y \\ \hat{y} &= C_I(\hat{p})x_I + G_I(\hat{p})y \\ \hat{x}_D &= E_I(\hat{p})x_I. \end{aligned} \tag{5}$$

realimentação de estado F tal que $A^\top + C^\top F$ é estável; claramente uma escolha possível é $F = -H^\top$.

O observador de Luenberger é uma construção semelhante ao filtro de Kalman que atenta apenas para os aspectos determinísticos do problema de estimação de estado. Existem outros tipos de observador, como os observadores de ordem reduzida. Em seguida apresentamos um observador de ordem aumentada, apropriado para uso em controle adaptativo.

Observador de dimensão $2n$. Será possível construir um observador adaptativo? Isto é, um observador com propriedades semelhantes às do observador assintótico, mas utilizável quando a tripla de matrizes (C, A, B) não é conhecida?

O ponto de vista que tomamos é que um observador nada mais é do que um estimador da saída – isto é, um sistema capaz de gerar uma estimativa $\hat{y}$ de y, logo o que nos interessa é sua descrição entrada-saída, e não o estado. (Em tempo discreto, este estimador corresponderia a um preditor da saída no instante $t+1$ a partir dos dados de entrada e saída até o instante t.) Transformando (2) por Laplace obtém-se

$$\hat{y} = C(sI - A)^{-1}(Bu + Dy),$$

onde as funções de transferência $\beta(s) = C(sI - A)^{-1}B$ e $\alpha(s) = C(sI - A)^{-1}D$ têm o mesmo denominador estável e numeradores arbitrários. Isso acima motiva a escolha da seguinte estrutura para o observador:

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= A_I x_I + b_I u + d_I y \\ \hat{y} &= c_I(p) x_I, \end{aligned} \tag{3}$$

onde

$$A_I = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix}, \quad b_I = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad D_I = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e $(A_{0_{n\times n}}, b_{0_{n\times 1}})$ é um par controlável arbitrário, com A_0 estável. Fazendo

$$c_I(p) = p^\top = \begin{bmatrix} p_1^\top & p_2^\top \end{bmatrix},$$

onde p_1 e p_2 são os únicos vetores n-dimensionais tais que $p_1^\top(sI - A)^{-1}b_0 = \alpha(s)$ e $p_2^\top(sI - A)^{-1}b_0 = \beta(s)$, resulta

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \begin{bmatrix} p_1^\top & p_2^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A_0 & 0 \\ 0 & sI - A_0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix} y \right) \\ &= p_1^\top(sI - A)^{-1} b_0 y + p_2^\top (sI - A)^{-1} b_0 u \\ &= \beta(s)u + \alpha(s)y. \end{aligned}$$

A controlabilidade do par (A_0, b_0) implica que p_1 e p_2 de fato existem. Se representarmos a função de transferência da planta como $\frac{\beta(s)}{1-\alpha(s)}$ podemos escrever

$$y = \beta(s)u + \alpha(s)y,$$

3. Observação e Identificação

O desenvolvimento de sistemas de controle adaptativo para plantas de dimensão um é bastante simplificado porque o estado completo está disponível para a construção do controlador. Para generalizar as idéias apresentadas no Capítulo 2 para plantas de dimensão maior que um, precisaremos de identificadores apropriados, que só utilizem a saída medida da planta. Em primeiro lugar apresentamos uma revisão sucinta dos observadores assintóticos de Luenberger.

Observadores assintóticos. Consideremos o problema de reconstruir assintoticamente o estado $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ de um sistema linear, invariante no tempo e observável

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

a partir de medidas de sua saída $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ e de sua entrada de controle $u \in \mathbb{R}^{n_u}$. A estimativa $\hat{x}$ dada pela solução da equação diferencial

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

não é conveniente a menos que A seja Hurwitz, isto é, tenha todos os seus autovalores no semiplano complexo esquerdo, uma vez que $\tilde{x} = \hat{x} - x$ fica regido por

$$\dot{\tilde{x}} = A\hat{x} + Bu - Ax - Bu = A\tilde{x},$$

isto é, $\tilde{x}$ só tende a zero se A for estável. O observador assintótico de Luenberger consiste em modificar a estimativa anterior realimentando o erro de observação $\tilde{y} = \hat{y} - y$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu - H\tilde{y} = (A - HC)\hat{x} + Bu + Hy \\ \hat{y} &= C\hat{x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Desta forma resulta

$$\dot{\tilde{x}} = (A - HC)\hat{x} + Bu + Hy - Ax - Bu = (A - HC)\tilde{x},$$

e $\tilde{x} \to 0$ se $A - HC$ for estável. Esta construção depende da possibilidade de encontrarmos uma matriz de injeção de saída H adequada, o que é garantido pelo bem conhecido

Teorema 1. *Se o par (C, A) for detectável, existe H tal que $A - HC$ é estável.*

Detectabilidade é uma condição mais fraca do que observabilidade; se (C, A) for observável, podemos alocar livremente os pólos de $A - HC$ através de uma injeção de saída H. Da mesma forma que observabilidade é dual de controlabilidade, detectabilidade é dual da estabilizabilidade: (C, A) é detectável se e somente se $(A^\top, C^\top)$ for estabilizável. Neste caso existe uma de controle adaptativo direto. Isso justifica a análise que foi feita de maneira apressada anteriormente.

Problemas.

1. Considere o sistema linear, invariante no tempo, e estável
$$\dot{x} = Ax + bu.$$
Supondo que $u \in \mathcal{L}^2[0, \infty)$, mostre que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Quais as condições adicionais que devem ser satisfeitas pelo sinal u para que $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$?
2. Discuta existência de soluções para o sistema de controle adaptativo indireto dado pelas equações diferenciais (Σ_P), (Σ_R), (Σ_I), e (Σ_T). O lado direito satisfaz condições de Lipschitz?
3. Simule em computador o sistema de controle adaptativo indireto do exercício 2.
4. Simule o sistema de controle adaptativo direto dado por (Σ_P), (Σ_R), (Σ_M), e (Σ_T direto).
5. Proponha e descreva alguma alternativa para o problema da passagem de $\hat{b}$ por zero no sistema de controle adaptativo indireto.
6. Projete um controle adaptativo de nível de líquido em um tubulão de caldeira de forma cilíndrica.
7. Discuta sistemas de controle "naturais" do ponto de vista da classificação de sistemas adaptativos em diretos e indiretos.

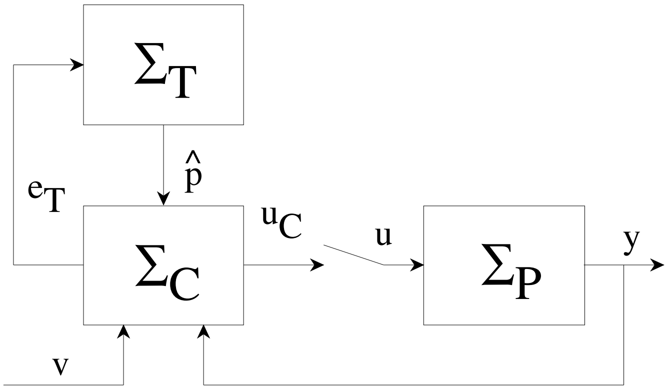

FIGURA 4. Sistema de Controle Adaptativo

Tanto o sistema de controle adaptativo direto com modelo de referência como o indireto podem ser descritos pela Figura 4. O controlador Σ_C representa no caso indireto o conjunto identificador + regulador, e no caso direto o conjunto modelo de referência + regulador. Em ambos os casos sua função é dupla: gerar o sinal de realimentação u_C e o erro de sintonia e_T (que pode ser o erro de identificação $\tilde{y}$ ou de controle z conforme o caso). Fazendo $u = u_C$ e acionando o sintonizador com e_T fechamos a dupla malha de controle adaptativo.

Soluções das equações diferenciais. Como sistemas de controle adaptativos têm dinâmica não-linear, é necessário tratar da existência de soluções para as equações diferenciais envolvidas. Vamos considerar o sistema de controle adaptativo direto dado por (Σ_P), (Σ_R), (Σ_M), e (Σ_T direto), que reproduzimos aqui por conveniência.

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= ay + b(fy + gv) \\
\dot{y}_M &= a_M y_M + b_M v \\
\dot{f} &= -\operatorname{sign}(b)\kappa_f y z \\
\dot{g} &= -\operatorname{sign}(b)\kappa_g v z.
\end{aligned}$$

Para qualquer condição inicial finita, existe uma solução local única para este sistema de equações diferenciais, isto é, existe um intervalo semi-aberto $[0, t_{\max})$ de duração máxima no qual a solução está bem definida. Então podemos utilizar o argumento da página 9 para concluir que f, g, e $z \in \mathcal{L}^\infty[0, t_{\max})$, e que $z \in \mathcal{L}^2[0, t_{\max})$. Isso significa que os lados direitos das equações diferenciais sob consideração satisfazem condições de Lipschitz e portanto as soluções são contínuas em $[0, t_{\max})$. Então se $t_{\max}$ fosse finito os estados $\{y, y_M, f, g\}$ teriam limites finitos para $t \to t_{\max}$; usando esses limites como ponto de partida, poderíamos continuar as soluções do sistema para além de $t_{\max}$, em contradição com a finitude do intervalo máximo de existência de soluções para as equações diferenciais que descrevem o sistema forma

$$(\Sigma_T \text{ direto}) \qquad \begin{aligned} \dot{\hat{f}} &= -\operatorname{sign}(b)\kappa_f yz \\ \dot{\hat{g}} &= -\operatorname{sign}(b)\kappa_g vz. \end{aligned}$$

A distinção entre os parâmetros $\{f, g\}$ do regulador e suas estimativas $\{\hat{f}, \hat{g}\}$, que pode parecer supérflua e até pedante, é útil para reforçar a diferença conceitual entre os diversos módulos que compõem o controlador adaptativo. Para analisar as propriedades do conjunto formado pela planta (Σ_P), regulador (Σ_R), modelo de referência (Σ_M), e sintonizador (Σ_T direto), definimos

$$V = \frac{1}{2}\left(z^2 + |b|(\hat{f} - f_*)^2 + |b|(\hat{g} - g_*)^2\right).$$

Escolhendo (por simplicidade) $\kappa_f = \kappa_g = 1$ e derivando obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z\dot{z} + |b|(\hat{f} - f_*)\dot{\hat{f}} + |b|(\hat{g} - g_*)\dot{\hat{g}} \\ &= a_M z^2 + b((f - f_*)y + (g - g_*))v)z - |b|\operatorname{sign}(b)((\hat{f} - f_*)y - (\hat{g} - g_*)v)z. \end{aligned}$$

Se então fizermos $f = \hat{f}$ e $g = \hat{g}$, que é a expressão do Princípio da Equivalência à Certeza no presente caso particular de controle direto, resulta

$$\dot{V} = a_M z^2 \leq 0.$$

Portanto $V(t)$ é limitado, o que significa que f, g, e $z \in \mathcal{L}^\infty$, e $z \in \mathcal{L}^2$. Isso é suficiente para estabelecer que $y = y_M + z$ é a soma de um sinal limitado com a resposta de um sistema estável a um sinal de referência limitado; portanto y é limitado. Além disso, a energia da diferença entre y e a saída y_M do modelo de referência é limitada, exatamente como desejávamos.

Controle indireto e controle direto. Um controlador adaptativo indireto opera através de uma identificação explícita, e os parâmetros assim estimados são utilizados para calcular os parâmetros de um controlador estabilizante freqüentemente denominado *regulador auto-ajustável.* Como a maioria da literatura em identificação trata de sistemas discretos em um contexto estocástico, por motivos históricos tanto como implementacionais o controle indireto está associado a problemas estocásticos em tempo discreto. Já em controle adaptativo direto são os próprios parâmetros do controlador que são ajustados, e a identificação de sistemas ocorre apenas de maneira implícita. A teoria de controle adaptativo direto foi originalmente desenvolvida para sistemas contínuos no tempo em uma abordagem determinística, e historicamente o conceito de modelo de referência nela figura de maneira proeminente. Porém nenhum obstáculo existe a uma abordagem estocástica, quer em tempo contínuo quer em tempo discreto, para o controle adaptativo direto. Analogamente o controladores indiretos podem também ser implementados em tempo contínuo, e uma técnica de projeto possível é a que usa um modelo de referência.

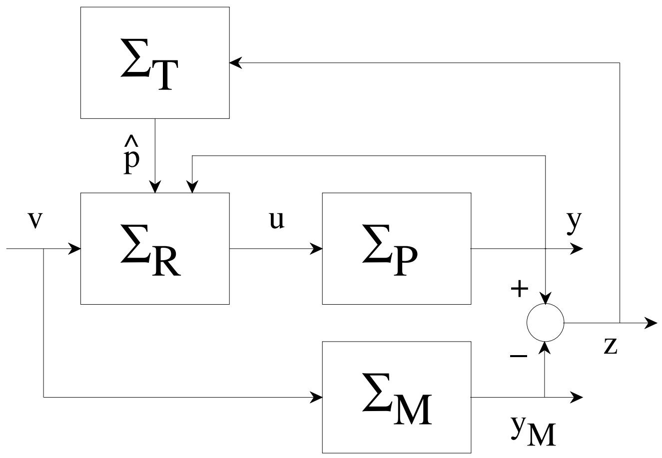

FIGURA 3. Controle Adaptativo com Modelo de Referência

Vamos escolher um modelo de referência estável, linear, de dimensão um, forçado por um sinal externo limitado v

$$(\Sigma_M) \qquad \dot{y}_M = a_M y_M + b_M v.$$

Com o objetivo de forçar (Σ_P) a seguir (Σ_M) utilizamos o controlador (Σ_R). Vamos definir $f_* = (a_M - a)/b$ e $g_* = b_M/b$. Se fizéssemos $f = f_*$ e $g = g_*$ e aplicássemos o controlador (Σ_R) à planta (Σ_P), resultaria

$$\dot{y} = (a + bf_*)y + bg_* v = a_M y + b_M v.$$

A parte forçada da resposta do sistema acima é igual à de (Σ_M), e devido à estabilidade assumida de (Σ_M), as partes homogêneas de ambas tendem assintoticamente a zero. Os valores desejados de f e g são portanto respectivamente f_* e g_*, ambos é claro desconhecidos, mas bem definidos sob a hipótese de controlabilidade da planta. Vamos escrever $z = y - y_M$ de modo que

$$\begin{aligned}\dot{z} &= ay + b(fy + gv) - a_M y_M - b_M v \\ &= a_M(y - y_M) + (bf - a_M + a)y + (bg - b_M)v \\ &= a_M z + b(f - f_*)y + b(g - g_*)v.\end{aligned}$$

Da mesma forma como anteriormente, poderíamos ajustar f e g numa direção tal que $(f - f_*)y + (g - g_*)v$ decrescesse. A dificuldade aqui é que o ganho desconhecido b aparece na equação do erro. Para contorná-la, façamos a

Hipótese 1. *O sinal de b é conhecido.*

Trata-se da primeira das assim chamadas hipóteses clássicas em controle adaptativo. O sintonizador, cuja função é ajustar estimativas $\hat{f}$ e $\hat{g}$, toma a função de transferência $\frac{\hat{b}}{s-\hat{a}}$ é cancelado. Esse fato não tem nenhuma relação com a estabilizabilidade de (Σ_P), mas sim com a de (Σ_D).

Várias propostas para lidar com o problema da estabilização podem ser encontradas na literatura:

1. Modificar o sintonizador de forma a manter os parâmetros dentro de um subconjunto no qual (Σ_D) é estabilizável. Esse conjunto deve ser convexo para que os métodos tradicionais de ajuste possam ser aplicados. Por outro lado, para que esta estratégia seja bem-sucedida devemos assumir que os parâmetros do sistema real estejam também contidos no subconjunto. Desta forma, torna-se necessário fazer hipóteses restritivas a respeito da classe de processos possíveis de serem controlados.
2. Reparametrizar o modelo de projeto de modo que não existam singularidades. Isso implica em uma parametrização não-linear de (Σ_D), o que dificulta bastante o ajuste de parâmetros.
3. Estabilizar o modelo de projeto apenas em pontos nos quais ele é estabilizável, abandonando, ao menos parcialmente, a idéia da equivalência à certeza. Dentro de uma região singular, que contém todos valores dos parâmetros para os quais as equações de síntese não tem solução, devemos buscar uma forma alternativa para projetar o controlador. Ou este novo projeto é capaz de garantir a estabilidade do sistema adaptativo como um todo, quer os parâmetros permaneçam dentro da região singular, quer eles a deixem após algum tempo; ou então é necessário usar alguma forma de excitação para forçar a convergência dos parâmetros para seus valores desejados, e portanto para fora da região singular.
4. Abandonar a idéia de computar o controle a partir de estimativas dos parâmetros da planta, e ajustar diretamente os parâmetros do controlador. Isto é, empregar controle direto, por si só ou em combinação com idéias de controle indireto.

Controle adaptativo com modelo de referência. Uma das técnicas mais populares de controle direto é o controle adaptativo com modelo de referência (MRAC). O objetivo de projeto é fazer com que o processo em malha fechada responda a sinais externos de forma semelhante a um sistema ideal. O erro entre a saída medida do processo e a saída deste modelo de referência é usado para ajustar os parâmetros do regulador por realimentação, fazendo um papel análogo ao do erro de identificação em controle indireto. É importante distingüir o modelo de referência do modelo de projeto e também do modelo do processo: são três coisas completamente diferentes. A Figura 3 é o diagrama de um sistema adaptativo com modelo de referência.

apenas negativa-definida. O que se pode obter, integrando a equação obtida para $\dot{V}$, é

$$\int_0^t \dot{V} = V(t) - V(0) = -\lambda \int_0^t \tilde{y}^2.$$

Portanto $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{y} \in \mathcal{L}^\infty$ (isto é, os três sinais são limitados), e $\tilde{y} \in \mathcal{L}^2$ (isto é, o erro de identificação tem energia limitada). Note que de forma nenhuma podemos concluir a convergência dos parâmetros $\hat{a}$ e $\hat{b}$ para os valores desejados a e b sem hipóteses adicionais. Um contra-exemplo é o caso no qual as condições iniciais dos estados da planta, bem como do observador, são nulas.

Análise do sistema de controle adaptativo indireto. Até agora não consideramos a realimentação propriamente dita. Vamos voltar à análise do sistema linear parametrizado $\Sigma(\hat{a}, \hat{b})$, formado por $(\Sigma_P) + (\Sigma_R) + (\Sigma_I)$, que reescrevemos a seguir:

$$(\Sigma) \qquad \begin{aligned} \dot{y} &= (a + bf)y \\ \dot{\hat{y}} &= -\lambda\hat{y} + (\lambda + \hat{a} + \hat{b}f)y. \end{aligned}$$

Usando o regulador por equivalência à certeza resulta

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}} &= -\lambda\hat{y} + \left(\lambda + \hat{a} - \cancel{\hat{b}}\, \frac{\hat{a} + \gamma}{\cancel{\hat{b}}}\right) y \\ &= -\gamma\hat{y} + (\gamma - \lambda)\tilde{y}. \end{aligned}$$

As equações acima revelam que o sistema parametrizado (Σ) é detectável através da saída $\tilde{y}$, para cada valor fixo dos parâmetros $\hat{a}$ e $\hat{b} \neq 0$. Senão vejamos: caso $\tilde{y}$ seja zero, o estado $\hat{y}$ tende a zero exponencialmente, devido à escolha de $\gamma > 0$. Mas neste caso $y = \hat{y} - \tilde{y}$ também tende a zero exponencialmente, ou seja, quando a saída é nula os estados tendem a zero, o que é precisamente uma definição de detectabilidade para sistemas lineares.

Os estados de um sistema detectável cuja saída se mantém pequena devem se manter pequenos também. No caso do sistema (Σ), a veracidade desta intuição fica estabelecida se considerarmos que $\tilde{y} \in \mathcal{L}^2$ conforme visto anteriormente. Neste caso $\hat{y}$, a saída de um sistema linear estável (de dimensão um) cuja entrada tem energia finita, tem energia também finita. Mas y é então a diferença entre dois sinais de energia finita, e sua energia é finita também. Então o sistema adaptativo como um todo é estável.

O problema da estabilização. Há um problema com essa linha de raciocínio: $\hat{b}(t)$ pode ser nulo em algum instante t mesmo que $b \neq 0$. Trata-se do conhecido problema da estabilização: o modelo de projeto (Σ_D) torna-se não controlável quando $\hat{b} = 0$, e mais do que isso não estabilizável quando $\hat{a} > 0$ também. Uma forma de enxergar isto é dizer que o pólo instável da

Subtraindo (Σ_P) da equação diferencial de $\hat{y}$ obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{y}} &= \hat{a}\hat{y} + \hat{b}u - ay - bu \\ &= a\tilde{y} + (\hat{a} - a)\hat{y} + (\hat{b} - b)u.\end{aligned}$$

Esse método só funciona se $a < 0$, isto é, se a planta que desejamos controlar for estável, como fica claro se supusermos momentaneamente que $\hat{a} = a$ e $\hat{b} = b$. Isso não é surpreendente pois o valor medido de y não está sendo usado para obter $\hat{y}$. Uma construção mais promissora, por analogia ao conhecido observador assintótico, envolve realimentar o erro de identificação através de uma injeção de saída $(\hat{a} + \lambda)\tilde{y}$:

$$(\Sigma_I) \qquad \dot{\hat{y}} = \hat{a}\hat{y} + \hat{b}u - (\hat{a} + \lambda)\tilde{y} = -\lambda\tilde{y} + \hat{a}y + \hat{b}u.$$

Aqui λ é uma constante positiva arbitrária. Subtraindo (Σ_P) de (Σ_I) obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{y}} &= -\lambda\tilde{y} + \hat{a}y + \hat{b}u - ay - bu \\ &= -\lambda\tilde{y} + \underbrace{(\hat{a} - a)}_{\tilde{a}}\, y + \underbrace{(\hat{b} - b)}_{\tilde{b}}\, u.\end{aligned}$$

Para tornar o erro de identificação $\tilde{y}$ pequeno, é suficiente tornar o termo $\tilde{a}y + \tilde{b}u$ pequeno.

O sintonizador. Sendo a e b desconhecidos, uma idéia natural é ajustar as estimativas $\hat{a}$ e $\hat{b}$ na direção em que $\tilde{a}y + \tilde{b}u$ decresce em magnitude. Vamos escolher $\kappa_a, \kappa_b > 0$ e fazer

$$(\Sigma_T) \qquad \begin{aligned}\dot{\hat{a}} &= -\kappa_a y\tilde{y} \\ \dot{\hat{b}} &= -\kappa_b u\tilde{y}.\end{aligned}$$

As equações acima descrevem o sintonizador, às vezes também chamado lei de ajuste ou lei adaptativa. Como assumimos a e b constantes, claramente $\dot{\hat{a}} = \dot{\tilde{a}}$ e $\dot{\hat{b}} = \dot{\tilde{b}}$. Para analisar as propriedades do conjunto formado pela planta (Σ_P), identificador (Σ_I), e sintonizador (Σ_T), vamos definir uma função de inspiração Lyapunoviana

$$V = \frac{1}{2}\left(\tilde{y}^2 + \frac{\tilde{a}^2}{\kappa_a} + \frac{\tilde{b}^2}{\kappa_b}\right).$$

Derivando obtemos

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \tilde{y}\dot{\tilde{y}} + \frac{\tilde{a}\dot{\tilde{a}}}{\kappa_a} + \frac{\tilde{b}\dot{\tilde{b}}}{\kappa_b} \\ &= \tilde{y}(-\lambda\tilde{y} + \tilde{a}y + \tilde{b}u) - \tilde{a}y\tilde{y} - \tilde{b}u\tilde{y} = -\lambda\tilde{y}^2 \le 0.\end{aligned}$$

Isso não demonstra estabilidade do sistema adaptativo! Em primeiro lugar, V não é positiva-definida, apenas semidefinida no estado do sistema adaptativo como um todo, que inclui $y, \hat{y}, \hat{a}$, e $\hat{b}$; em segundo lugar, $\dot{V}$ é

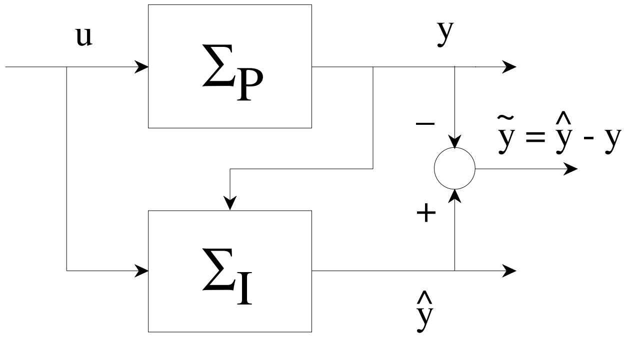

FIGURA 1. Erro de Identificação

um objetivo de comportamento para a planta em malha fechada. O modelo de projeto é um sistema dinâmico parametrizado, no presente caso linear, invariante no tempo, de dimensão um, com parâmetros $\hat{a}$ e $\hat{b}$, que não fará parte do sistema de controle adaptativo. Trata-se de uma construção puramente abstrata, utilizada para projetar um controlador por equivalência à certeza na ausência de conhecimento a respeito dos parâmetros reais da planta.

Na literatura a idéia de projetar um controlador parametrizado como se as estimativas dos parâmetros fossem corretas é conhecida como *Princípio da Equivalência à Certeza*. Quando os parâmetros do controlador são calculados a partir de estimativas de parâmetros do processo, temos um sistema de controle adaptativo *indireto*. Em um sistema de controle adaptativo *direto* os próprios parâmetros do controlador são sintonizados. A Fig. 2 esquematiza a idéia de projetar um regulador parametrizado ou controlador de equivalência à certeza $\Sigma_R(p)$.

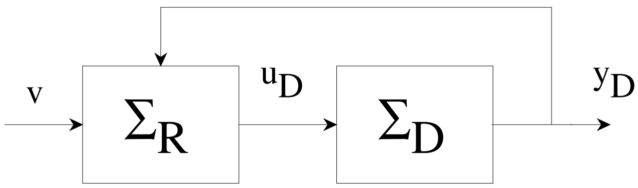

FIGURA 2. Controle por Equivalência à Certeza

O identificador. Como podemos construir Σ_I? Uma primeira tentativa é imitar a planta (Σ_P) com um sistema dinâmico de estado $\hat{y}$:

$$\dot{\hat{y}} = \hat{a}\hat{y} + \hat{b}u.$$

2. Conceitos de Controle Adaptativo

Um problema de controle adaptativo. Considere a planta linear, invariante no tempo, de dimensão um

$$(\Sigma_P) \qquad \dot{y} = ay + bu,$$

onde $u(t) \in \mathbb{R}$ é uma entrada de controle, $y(t) \in \mathbb{R}$ é a saída medida, e a, b são constantes desconhecidas. Será possível estabilizar (Σ_P) usando uma realimentação (possivelmente dinâmica e não-linear) de saída? Uma condição necessária é *estabilizabilidade:* $b \neq 0$ ou $a < 0$. *Detectabilidade* é satisfeita automaticamente porque o sistema é observável. Enquanto estivermos projetando controladores não-lineares capazes de estabilizar (Σ_P) na ausência de informação completa sobre a e b, adotaremos o ponto de vista adaptativo: sintetizar um controlador que se auto-ajuste com base no comportamento observado da planta ao mesmo tempo em que envia um sinal de controle a ela.

O princípio da equivalência à certeza. Se (a, b) fossem conhecidos, usaríamos a realimentação

$$(\Sigma_R) \qquad u = fy + gv,$$

que resultaria no sistema em malha fechada

$$\dot{y} = (a + bf)y + bgv.$$

Na discussão que segue o sinal externo v não desempenha papel fundamental, portanto tomaremos $g = 0$. Satisfeita a condição $a + bf = -\gamma < 0$, teríamos estabilidade do sistema em malha fechada. Poderíamos portanto escolher $\gamma > 0$ e tomar $f = -\frac{a+\gamma}{b}$ arbitrário, ao menos se $b \neq 0$, isto é, se (Σ_P) for controlável.[1] Sendo a e b desconhecidos, um modo de proceder é o seguinte:

- Escolher um identificador $\Sigma_I(\hat{a}, \hat{b})$ e determinar $(\hat{a}, \hat{b})$ de modo a minimizar o erro $\tilde{y} = \hat{y} - y$ entre a saída da planta e a de Σ_I, conforme esquematizado na Fig. 1.
- Usar o regulador parametrizado (Σ_R) com $f = -\dfrac{\hat{a} + \gamma}{\hat{b}}$ para controlar a planta.

Os parâmetros $(\hat{a}, \hat{b})$ são estimativas de (a, b), e regulador (Σ_R) foi escolhido de forma a estabilizar o modelo de projeto

$$(\Sigma_D) \qquad \dot{y}_D = \hat{a}y_D + \hat{b}u_D.$$

Vale a pena insistir um pouco neste conceito: o modelo de projeto não é um modelo alternativo para a planta, nem um identificador utilizado para gerar um erro de identificação, tampouco um modelo de referência que descreve

[1] Uma fórmula mais geral para f, inspirada em controle ótimo linear-quadrático, é $f = -bp$, onde p é a solução positiva da equação de segundo grau $2ap - b^2p^2 + 1 = 0$, conhecida como equação algébrica de Riccati.

1. Introdução

Essa monografia tem três objetivos. O primeiro é cumprir parcialmente os requisitos do concurso de livre-docência junto ao Departamento de Engenharia Eletrônica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, na especialidade Controle & Automação. O segundo é servir como texto didático para cursos de pós-graduação sobre controle adaptativo. O terceiro é apresentar uma visão pessoal coerente, embora ainda incompleta, de alguns dos temas principais da teoria de controle adaptativo, sistematizando um trabalho de ensino e pesquisa desenvolvido no Laboratório de Automação & Controle da Universidade de São Paulo desde 1993.

A organização do texto sistematizado é a seguinte: o Capítulo 2 apresenta os conceitos fundamentais da teoria de controle adaptativo, tais como o princípio da equivalência à certeza, controle direto e indireto, modelo de referência e modelo de projeto, e análise de estabilidade, através do estudo de um problema simples de controle adaptativo. O Capítulo 3 discute a construção de observadores adequados para o uso em controle adaptativo. O Capítulo 4 apresenta de maneira resumida e simplificada os princípios da teoria de identificação de sistemas mais importantes para o controle adaptativo. Estes capítulos são baseados em notas de aula para o curso PEE-5784, Princípios de Controle Adaptativo, ministrado desde 1993 dentro do programa de pós-graduação em engenharia elétrica na USP. Trata-se na maior parte de material conhecido na literatura e por isso estes capítulos contém até listas de problemas propostos. O pré-requisito para o entendimento desta parte resume-se a um bom curso de sistemas lineares, por exemplo [22].

Os demais capítulos tratam de assuntos menos conhecidos ou em desenvolvimento, e apresentam resumos de artigos escritos pelo autor dessa monografia, individualmente ou em colaboração, a partir de 1994. Alguns desses artigos já apareceram em periódicos; outros tiveram versões preliminares apresentadas em congressos; e pelo menos um ainda está em elaboração. A construção e análise de sistemas adaptativos estáveis utilizando controladores por equivalência à certeza é o objeto do Capítulo 5, que contém um resumo do material apresentado nos artigos [21, 12]. O Capítulo 6 resume uma contribuição para o estudo da robustez de sistemas de controle adaptativo [20]. Finalmente, o projeto de controladores adaptativos diretos utilizando conceitos de controle ótimo linear-quadrático é o tema dos artigos [15] e [17], resumidos no Capítulo 7.

Alguns assuntos importantes para a teoria de controle adaptativo não recebem tratamento mais aprofundado no presente texto, por exemplo: as técnicas de controle adaptativo utilizando modelo de referência, discutidas em livros texto facilmente disponíveis, tais como [8, 1, 2, 13, 23, 7]; o controle adaptativo de sistemas não-lineares [6]; e os chamados controladores universais [8, 4].

ELEMENTOS DE CONTROLE ADAPTATIVO

FELIPE M PAIT

Resumo. Essa monografia tem três objetivos. O primeiro é cumprir parcialmente os requisitos do concurso de livre-docência junto ao Departamento de Engenharia Eletrônica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, na especialidade Controle & Automação. O segundo é servir como texto didático para cursos de pós-graduação sobre controle adaptativo. O terceiro é apresentar uma visão pessoal coerente, embora ainda incompleta, de alguns dos temas principais da teoria de controle adaptativo, sistematizando um trabalho de ensino e pesquisa desenvolvido no Laboratório de Automação & Controle da Universidade de São Paulo desde 1993. A forma presente do texto é um compromisso entre esses objetivos.

Sumário