

**3ª Lista de Exercícios**  
**PTC 2640 - Modelos Probabilísticos**

1) Máquinas em uma fábrica falham a uma taxa exponencial de 6 por hora. Um único operário é responsável pelo reparo das máquinas, a uma taxa exponencial de 8 por hora. O custo pela produção perdida é de R\$ 10,00 por hora por máquina. Qual é o custo médio por hora gerado pelas máquinas fora de uso? (Assuma que a fábrica possui um número muito grande de máquinas, aproximando por infinito).

2) Considere uma fila infinita com um único servidor. Chegadas ocorrem de acordo com um processo de Poisson a uma taxa  $\lambda$ . O tempo de cada serviço é uma variável exponencial com parâmetro  $\mu$ . Sempre que um serviço é concluído o cliente pode retornar ao fim da fila com probabilidade  $\alpha$  (portanto um cliente pode ser servido mais de uma vez).

- a) Escreva as equações de balanço e resolva-as para obter as probabilidades estacionárias  $P_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Estabeleça a condição de equilíbrio para a fila.
- b) Obtenha o tempo de espera médio de um cliente entre a sua chegada até a 1ª vez que é atendido.
- c) Qual é a probabilidade de que um cliente seja atendido exatamente  $n$  vezes?
- d) Qual é o tempo médio que um cliente gasta em serviço (não inclua o tempo na fila)?

3) Uma pequena barbearia, operada por um único barbeiro, tem espaço para no máximo 2 clientes. Clientes em potencial chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa de 3 clientes por hora. O tempo de serviço para cada cliente é uma variável exponencial com média igual a 15 minutos. Determine:

- a) o número médio de clientes na barbearia.
- b) a proporção de clientes em potencial que entra na barbearia.
- c) o tempo médio gasto na barbearia por um cliente que entra.
- d) se o barbeiro pudesse trabalhar 2 vezes mais rápido, quantos clientes a mais ele poderia atender?

4) Clientes em potencial chegam a um posto de gasolina de acordo com um processo de Poisson com taxa de 20 carros por hora. O posto tem espaço para no máximo 3 carros. O tempo médio de atendimento é exponencialmente distribuído com média de 5 minutos. Determine:

- a) a proporção do tempo que o servidor ficará ocupado.
- b) a proporção de clientes em potencial que é perdida.
- c) o tempo médio gasto no sistema por um cliente que entra.
- d) o tempo médio gasto na fila por um cliente que entra.

5) Clientes em potencial chegam a uma loja de acordo com um processo de Poisson com taxa de 40 clientes por hora. A loja tem espaço para, no máximo, 4 clientes. Enquanto o total de clientes na loja é menor ou igual a 2 apenas um funcionário atende os clientes. O tempo de serviço desse funcionário é uma variável exponencial com média de 2 minutos. Quando a loja possui 3 ou 4 clientes, um assistente auxilia o trabalho do funcionário de modo a reduzir o tempo esperado de serviço para 1 minuto. Determine:

- a) a proporção do tempo que os servidores estão livres.
- b) o pagamento que cada servidor deverá receber se o total a ser pago é de R\$ 100,00, e cada servidor receberá de acordo com o tempo efetivamente trabalhado.
- 6) Uma fábrica possui 3 máquinas e 2 estações de reparo. O tempo até falha de cada máquina possui distribuição exponencial com média de 10 horas. Cada estação de reparo leva um tempo exponencial para reparar uma máquina defeituosa, com média de 8 horas. Determine:
- a) o número médio de máquinas fora de uso.
- b) a proporção do tempo que as 2 estações de reparo estão ocupadas.
- c) a proporção do tempo que cada máquina fica fora de uso.
- 7) Considere um sistema de serviço sequencial com 2 servidores,  $A$  e  $B$ . Um cliente que chega só entra se o servidor  $A$  estiver livre e, nesse caso, é imediatamente servido por este servidor. Quando o serviço do servidor  $A$  é concluído, ele segue para o servidor  $B$  caso este esteja livre. Se o servidor  $B$  estiver ocupado, o cliente vai embora imediatamente. Considerando que clientes em potencial chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa de 2 por hora, e que o tempo de serviço dos servidores  $A$  e  $B$  são variáveis exponenciais com média de 15 minutos e 30 minutos respectivamente, determine:
- a) a proporção de clientes que entra no sistema.
- b) a proporção de clientes que entra e recebe o serviço do servidor  $B$ .
- c) o número médio de clientes no sistema.
- d) o tempo médio gasto no sistema por um cliente que entra.
- 8) Clientes chegam a uma fila ilimitada de acordo com um processo de Poisson com taxa  $\lambda$ . Dois servidores  $A$  e  $B$  atuam em paralelo, cada um com um tempo de serviço exponencialmente distribuído com taxas  $\mu_A$  e  $\mu_B$  respectivamente. Quando o sistema está vazio, o cliente que chega se dirige ao servidor  $A$  com probabilidade  $\alpha$ , ou ao servidor  $B$  com probabilidade  $1 - \alpha$ . Nas outras situações o cliente na ponta da fila se dirige ao primeiro servidor livre.
- a) Apresente o diagrama de Markov deste modelo, e equacione as equações de balanço.
- b) Escreva em função de  $P_n$  o número médio de clientes no sistema, e o número médio de servidores ociosos.
- c) Escreva em função de  $P_n$  a probabilidade de um cliente ser atendido pelo servidor  $A$ .
- 9) Considere um equipamento que pode estar em 2 estados, em operação ou em reparo. A taxa exponencial de falhas é  $\lambda$ , e a taxa exponencial de reparos é  $\mu$ . Utilizando as equações de avanço determine a probabilidade do equipamento estar em operação no instante  $t$  dado que inicialmente o equipamento está em operação.
- 10) Considere 2 máquinas, cada uma com taxa exponencial de falha  $\lambda$ . Um único servidor repara as máquinas em caso de falhas, com um tempo exponencialmente distribuído com média  $\frac{1}{\mu}$ . Determine a probabilidade dos 2 equipamentos estarem em operação no instante  $t$  dado que inicialmente os 2 equipamentos estão em operação.