PTC 2640 - Modelos Probabilísticos - 2^a Lista 2007

1^a Questão: Uma moeda é escolhida aleatoriamente de um grupo de 10 moedas, tendo a n^{esima}moeda probabilidade $\frac{n}{10}$ de dar cara. A moeda é jogada sucessivamente até que a primeira cara apareça. Seja N o número de jogadas até que isto ocorra. Qual é a distribuição de probabilidade de N? É uma distribuição geométrica? Sob que condições N seria uma distribuição geométrica?

2^a Questão: A distribuição conjunta de X e Y é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = (y^2 - x^2)\frac{e^{-y}}{8}, \ -y \leq x \leq y, \ 0 < y < \infty.$$

Determine $E(X|Y = y)$.

3^a Questão: A distribuição conjunta de X e Y é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-y}}{y}, \ 0 < x < y, \ 0 < y < \infty.$$

Determine $E(X^2|Y = y)$.

4^a Questão: Um prisioneiro está preso em uma cela com 3 portas. A primeira porta leva a um túnel que, após 2 dias, retorna ao ponto inicial, a segunda a um túnel que, após 3 dias, retorna ao ponto inicial, e a terceira leva à liberdade imediatamente.

a) Supondo que o prisioneiro sempre escolhe as portas 1, 2 e 3 com probabilidades 0,5, 0,3 e $0,2$ respectivamente, determine o número de dias esperado até o prisioneiro alcançar a liberdade.

b) Repita o item a), assumindo agora que o prisioneiro é igualmente provável de escolher uma das portas que ele não tenha escolhido anteriormente.

c) Para os itens a) e b), determine a variância do número de dias esperado até o prisioneiro alcançar a liberdade.

5^a Questão: Uma urna contém 3 moedas. Moeda 1, quando jogada, tem probabilidade $0,3$ de dar cara, a moeda 2 tem probabilidade $0,5$, e a moeda 3 tem probabilidade $0,7$. Uma moeda é escolhida aleatoriamente, e jogada 10 vezes. Seja N o número de caras obtidas das 10 jogadas. Determine:

a) $P(N = n)$, $n = 0, 1, ..., 10$,

b) N tem distribuição binomial? E se a cada jogada a moeda fosse re-colocada na urna, e outra moeda fosse sorteada?

c) Se voce ganhasse R\$ $1,00$ para cada cara, e perdesse R\$ $1,00$ para cada coroa, este jogo seria um jogo justo? Justifique.

6^a Questão: Suponha que X seja uma variável de Poisson com média λ. Suponha também que λ seja uma variável aleatória com distribuição exponencial com média 1. Determine $P(X = n)$, $n = 0, 1, 2, ...$

7^a Questão: Três bolas brancas e três bolas pretas são colocadas em 2 urnas de modo que cada urna sempre contém três bolas. A cada rodada uma bola é sorteada de cada urna, e a bola da urna 1 e colocada na urna 2, e a bola da urna 2 é colocada na urna 1.

a) Modele o problema como uma cadeia de Markov $\{X_k; k = 0, 1, ...\}$, especificando os estados e o significado de X_k.

b) Dado que inicialmente urna 1 contém 3 bolas brancas, determine a probabilidade de se ter pelo menos 2 bolas brancas na urna 1 após 6 rodadas.

c) No limite quando k tende a infinito, determine a probabilidade de se ter n bolas brancas na urna 1, $n = 0, 1, 2, 3$.

8^a Questão: Seja a matriz de transição P dada por

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Obtenha uma fórmula para P^n. Determine $lim_{n \to \infty} P^n$.

9^a Questão: Moeda 1 tem probabilidade $0,7$ de sair cara, e moeda 2 tem probabilidade $0,6$ de sair cara. Se a moeda jogada hoje der cara, então escolhe-se a moeda 1 para ser jogada no dia seguinte, caso contrário escolhe-se a moeda 2. Se a moeda escolhida inicialmente é igualmente provável de ser a moeda 1 ou 2, qual é a probabilidade de que a moeda jogada no terceiro dia seja a moeda 1?

10^a Questão: Uma matriz de transição P é dita ser duplamente estocástica se $\sum_i p_{ij} = 1$ para todo j. Se a cadeia é irredutível, aperiódica, e possui $M+1$ estados, mostre que as probabilidades limites são dadas por

$$\pi_j = \frac{1}{M+1}, \, j = 0, 1, ..., M.$$

11^a Questão: Uma partícula se move em um círculo marcado pelos pontos 0, 1, 2, 3, 4 (sentido horário). Em cada instante a partícula tem probabilidade p de se mover para a direita (sentido horário) e $1-p$ para a esquerda (sentido anti-horário). Seja X_k a posição da partícula no instante k.

a) Determine a matriz de transição de probabilidades P.

b) A probabilidade da partícula estar na posição 2 no instante $k = 8$, dado que começou na posição 0 em $k = 0$.

c) Calcule as probabilidades limites.

12^a Questão: Seja Y_n o resultado da soma de n dados independentes. Determine

$$lim_{n \to \infty} P(Y_n \text{ é múltiplo de } 13).$$

13^a Questão: Considere o problema da ruína do jogador com $N = 4$. Seja P_i a probabilidade do jogador sair vencedor quando começa com i e M_i o número esperado de jogadas até o jogo terminar, com o jogador quebrando ou ganhando 4. Calcule P_i e M_i para $i = 1, 2, 3$.

14^a Questão: Considere uma agência de correio com 2 servidores. Três pessoas, A, B, C, entram simultaneamente na agência. A e B vão diretamente para os servidores, e C fica esperando até que A ou B termine o serviço. Qual é a probabilidade de A ainda estar sendo servido depois de B e C terem partido nas seguintes condições:

a) o tempo de serviço de cada servidor é exatamente 10 minutos.

b) os tempos de serviço são i minutos com probabilidades $\frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$.

c) os tempos de serviço são exponenciais com média $\frac{1}{\mu}$.

15^a Questão: Mostre que se $N_1(t)$ e $N_2(t)$ são processos de Poisson independentes com taxas λ_1 e λ_2 respectivamente então $N_1(t) + N_2(t)$ também é um processo de Poisson com taxa $\lambda_1 + \lambda_2$.

16^a Questão: Para um processo de Poisson $N(t)$ com parâmetro λ, obtenha a distribuição de

$$P(N(s) = k | N(t) = n)$$

para $s < t$.

17^a Questão: Clientes chegam a um banco de acordo com um processo de Poisson com taxa λ. Suponha que 2 clientes tenham chegado ao banco na primeira 1 hora. Determine a probabilidade de que

a) ambos tenham chegado nos primeiros 20 minutos.

b) pelo menos 1 tenha chegado nos primeiros 20 minutos.

18^a Questão: Uma companhia de seguros recebe pedidos semanais de pagamento de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda = 5$ por semana. Se a quantia paga para cada apólice de seguro é exponencialmente distribuída com média $R\$ \, 2000,00$, qual é a média e a variância da quantia paga pela companhia em 4 semanas?