

PTC 2640 - Modelos Probabilísticos - 1ª Lista 2007

1ª Questão: Se $P(E) = 0.9$ e $P(F) = 0.8$ mostre que $P(EF) \geq 0.7$. Mostre que em geral

$$P(EF) \geq P(E) + P(F) - 1.$$

2ª Questão: Considere 2 jogadores A e B , e um jogo com probabilidade p de ser um “sucesso”, e $1 - p$ de ser um “fracasso”. Jogador A começa jogando, e se sair “sucesso” ganha o jogo. Caso contrário passa a vez para o jogador B que ganha o jogo se sair um “sucesso”. Caso contrário, passa a vez para o jogador A , que re-inicia todo o processo novamente. Determine: a) as probabilidades dos jogadores A e B ganharem o jogo. b) o valor esperado do número de rodadas até o jogo terminar.

3ª Questão: Três dados são jogados. Qual é a probabilidade do mesmo número aparecer em exatamente 2 dos 3 dados?

4ª Questão: Urna I contém 2 bolas brancas e 1 bola preta, e urna II contém 1 bola branca, e 5 bolas pretas. Uma bola é sorteada da urna I, e colocada na urna II. Logo depois uma bola é sorteada da urna II. Dado que esta bola é branca, qual é a probabilidade de que a 1ª bola sorteada tenha sido branca?

5ª Questão: Suponha que cada criança que nasce é igualmente provável de ser um menino ou uma menina. Se uma família tem 2 crianças, qual é a probabilidade de que as duas sejam meninas dado que: a) a mais velha é menina ? b) pelo menos uma é menina ?

6ª Questão: Dois dados são jogados. a) Qual é a probabilidade de que pelo menos um deles seja 6? b) Dado que os dados deram números diferentes, qual é a probabilidade de que pelo menos um deles tenha sido 6?

7ª Questão: Fábricas A, B, C possuem 50, 75 e 100 funcionários, e 50%, 60% e 70% são mulheres respectivamente. Demissões são igualmente prováveis de ocorrer para todos os funcionários e para ambos os sexos. Dado que uma funcionária é demitida, qual é a probabilidade de que tenha sido uma funcionária da fábrica C ?

8ª Questão: Uma classe de aula tem 4 calouros, 6 calouras, e 6 veteranos. Quantas veteranas esta classe deve ter para que sexo e tempo de estudo sejam eventos independentes quando se escolhe um estudante aleatoriamente?

9ª Questão: Suponha que em um grupo de 3 pessoas cada uma joga uma moeda. a) Assumindo que as moedas sejam não tendenciosas, qual é a probabilidade do resultado de uma moeda ser diferente das outras? b) Repita o item a), supondo agora que a probabilidade de uma moeda dar cara seja $\frac{1}{4}$.

10ª Questão: Considere uma população com igual número de homens e mulheres. Suponha que 5% dos homens e 0.25% das mulheres sejam daltônicos. Uma pessoa é escolhida aleatoriamente, e é daltônica. Qual é a probabilidade de que seja um homem?

11ª Questão: Uma pessoa tem 2 moedas uma justa e outra falsa, com cara nos dois lados. Ele escolhe uma aleatoriamente. a) Ele joga a moeda e o resultado é cara; qual é a probabilidade de que ele tenha escolhido a moeda justa? b) Ele joga novamente a moeda, e novamente sai cara; qual é a probabilidade de que ele tenha escolhido a moeda justa? c) Ele joga mais uma vez a moeda, e desta vez sai coroa; qual é a probabilidade de que ele tenha escolhido a moeda justa?

12ª Questão: Considere 10 moedas. Se a i ésima moeda é jogada a probabilidade de sair uma cara é $\frac{i}{10}$. Uma moeda é sorteada e lançada. Se o resultado é cara, qual é a probabilidade de que a moeda sorteada tenha sido a i ésima?

13ª Questão: Urna I contém 5 bolas brancas e 7 bolas pretas, e urna II contém 3 bolas brancas e 12 bolas pretas. Jogamos uma moeda. Se o resultado é cara, uma bola da urna I é sorteada, e se o resultado é coroa, uma bola da urna II é sorteada. Dado que a bola sorteada é branca, qual é a probabilidade de que a moeda tenha dado coroa?

14ª Questão: Suponha que um dado justo seja lançado 2 vezes. Determine as probabilidades as seguintes variáveis aleatórias: a) o maior valor entre os dois dados ; b) o menor entre os dois dados.

15ª Questão: Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas, independentes, e com f.d.p. $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ respectivamente. a) Calcule $P(X \leq Y)$. b) Supondo X e Y exponencialmente distribuídas com parâmetro λ_1 e λ_2 respectivamente, determine $P(X \leq Y)$. c) Supondo X e Y uniformemente distribuídas no intervalo $(0, 1)$ e $(0, 4)$ respectivamente, determine $P(X \leq Y)$.

16ª Questão: Seja X uma variável aleatória com f.d.p. dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & \text{para } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine c . b) Calcule $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$.

17ª Questão: Uma moeda com probabilidade p de dar cara é jogada até que r^{esima} cara ocorra. Seja N o número de jogadas até que isto ocorra. Calcule $E(N)$.

18ª Questão: Sejam X_1, \dots, X_N variáveis aleatórias independentes, cada uma uniformemente distribuída no intervalo $(0, 1)$. Seja $Z = \max\{X_1, \dots, X_N\}$. Determine a função densidade de probabilidade de Z .

19ª Questão: Suponha que 3 dados justos sejam lançados. Qual é a probabilidade de se ter no máximo um 6?

20ª Questão: O dono de uma loja possui 3 produtos à venda. Um cliente pode adquirir o produto A com probabilidade 0.5, o produto B com probabilidade 0.2, e o produto C com probabilidade 0.3? Se o dono vende 5 produtos, qual é a probabilidade de que seja 2 do produto A , 1 do produto B , e 2 do produto C ?

21ª Questão: Uma pessoa diz ter poderes extra-sensoriais. Como teste, uma moeda justa é lançada 10 vezes e esta pessoa deve prever os resultados. Esta pessoa acerta 7 resultados. O que voce acha do desempenho desta pessoa ?

22ª Questão: Uma empresa aérea sabe que 5% das pessoas que fazem reserva não aparecem. Por isto vende 52 assentos para um vôo com 50 lugares. No dia do vôo, qual é a probabilidade de todos os passageiros embarcarem?

23ª Questão: Considere 2 ativos com retornos R_1 e R_2 , fator de correlação ρ , e médias e desvios padrão

$$r_1 = 10\%, r_2 = 18\%, \sigma_1 = 15\%, \sigma_2 = 30\%.$$

- Considerando $\rho = 0.1$, determine o peso ω_1 de modo a minimizar a variância da carteira com retorno $P = \omega_1 R_1 + (1 - \omega_1) R_2$. Qual é o valor da variância mínima σ_{min}^2 e o retorno esperado μ_{min} ?
- Ainda considerando $\rho = 0.1$ obtenha e trace a equação que relaciona $\sigma \times \mu$.
- Para que valor de ρ obtemos uma carteira com retorno esperado $\mu = 15\%$ e desvio padrão $\sigma = 20\%$? Qual é o valor de ω_1 para esta carteira?